UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

ELINELSON GOMES DE OLIVEIRA

UMA ABORDAGEM DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL, TENDO A HISTÓRIA COMO RECURSO DIDÁTICO

Maceió – AL

2015

ELINELSON GOMES DE OLIVEIRA

UMA ABORDAGEM DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL, TENDO A HISTÓRIA COMO RECURSO DIDÁTICO

Dissertação de Mestrado, apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra

Maceió – AL

2015

Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

O48a Oliveira, Elinelson Gomes de.
Uma abordagem da trigonometria no ensino fundamental, tendo a história como Recurso didático / Elinelson Gomes de Oliveira. – 2015.
89 f. : il.

Orientador: Ediel Azevedo Guerra.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2015.

Bibliografia: f. 84-85.
Anexos: f. 86-89.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Trigonometria – Ensino e aprendizagem.

3. Trigonometria - História. 4. Triângulo. 5. Teodolito. I. Título.

CDU: 514.116

ELINELSON GOMES DE OLIVEIRA

UMA ABORDAGEM DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL,

TENDO A HISTÓRIA COMO RECURSO DIDÁTICO

Dissertação de Mestrado, apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Profº. Dr. Ediel Azevedo Guerra (Orientador)

Profª. M.ª Viviane de Oliveira Santos

Profº. Dr. Vicente Francisco de Sousa Neto

À minha esposa, Jackeline dos Santos Oliveira e aos meus filhos:
Gabriel dos Santos Oliveira e Miguel dos Santos Oliveira.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, acima de tudo e primeiramente, por estar sempre presente em minha vida.

À minha esposa Jackeline e aos meus filhos Gabriel e Miguel pelo incentivo durante todo o tempo.

Ao meu orientador Professor Dr. Ediel Azevedo Guerra pela atenção, dedicação e paciência, para que este trabalho se tornasse possível, estando sempre disponível em todos os momentos que precisei.

Aos meus amigos do mestrado (PROFMAT) que colaboraram com o meu crescimento e aprendizado durante todo o curso e, principalmente, pelo incentivo na qualificação em especial ao Aldo Agustinho, André Carlos, André Oliveira, Elielson Magalhães, Evison Rosalino, Josimar Santos, Leandro, Lindberg, Marcel Cavalcante, Marcelo José e Maria Dayane.

Aos amigos Cleverton Vasconcelos, Clayton Pereira, Gracino Francisco, Marlos Tácio, e Tiago Marinho pela contribuição para a realização desse trabalho.

Aos professores e amigos Edival Faustino e Jayzon Alexandre pela revisão gramatical do texto e tradução do resumo para o Inglês.

À minha amiga professora Maria Cristina Veríssimo Faustino pela compreensão e apoio todas as vezes que precisei.

À minha amiga Diva Moreira e a professora Josete Oliveira pelo ajuda nos momentos em que precisei.

A todos os professores do programa do PROFMAT por terem contribuído para meu crescimento.

A banca examinadora, que cederam uma parte de seu tempo precioso para poder contribuir com meu trabalho.

Aos alunos que aceitaram participar do projeto e à equipe pedagógica na pessoa da minha coordenadora Maria Izabel L. Mendonça e demais colegas de trabalho do Colégio Municipal Judith Paiva onde a proposta foi desenvolvida.

Ao Coordenador do PROFMAT Prof. Dr. Luís Guillermo Martinez pelo seu empenho e dedicação ao programa.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa concedida durante o mestrado.

RESUMO

Neste trabalho, está exposto o relato da elaboração e da aplicação de uma sequência didática para uma abordagem da trigonometria no ensino fundamental, tendo a história da matemática como recurso didático. Essa sequência foi elaborada, visando a atender as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). São apresentadas sucintas biografias de alguns matemáticos que foram marcantes nesse tópico da Matemática, bem como alguns métodos práticos utilizados por eles. São destacadas, além disso, algumas definições, propriedades e alguns teoremas que são necessários para o desenvolvimento da trigonometria no Ensino Fundamental. Em sequência, passa-se ao relato dos seminários apresentados pelos alunos sobre a História da Trigonometria, com a utilização de slides e vídeos. Por fim, é apresentada a maneira pela qual os alunos fizeram alguns experimentos para calcular a altura de alguns objetos, utilizando o teodolito como um instrumento, o qual proporcionou um elo entre a História e a prática.

Palavras chave: História. Trigonometria. Triângulo. Teodolito.

ABSTRACT

This work exposed the story of the development and implementation of a didactic sequence to an approach of trigonometry in elementary school having the history of mathematics as a teaching resource. This sequence was developed in order to meet the recommendations of the National Curriculum Parameters (PCN). Brief biographies are presented a few mathematicians who were striking in that topic of mathematics and some practical methods used by them. Are highlighted, in addition, some definitions, properties and some theorems that are necessary for the development of trigonometry in Elementary Education. Then it goes to the account of the seminars presented by the students on the History of Trigonometry, with the use of slides and videos on the topic. Finally, it is presented the way in which the students made some experiments to calculate the height of some objects using the theodolite as an instrument, which provided a link between the history and practice.

Keywords: History. Trigonometry. Triangle. Theodolite.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta dissertação tem como finalidade principal a apresentação de um modo simples e objetivo de trabalhar a trigonometria no Ensino Fundamental, utilizando a história desse tópico como recurso didático.

Esse tema é de fundamental importância para o currículo do aluno nesse nível de ensino, uma vez que o prepara para estudos posteriores e amplia a possibilidade de relacionar os conhecimentos matemáticos com o seu cotidiano. O tema foi escolhido e desenvolvido com um duplo objetivo: (1) oferecer uma resposta a constantes indagações dos alunos em sala de aula, tais como: “quem inventou e para que serve a matemática?”; (2) criar condições para superação das dificuldades dos alunos em relacionar conceitos aprendidos no ambiente escolar com o mundo prático.

A história e os conceitos fundamentais da trigonometria foram escolhidos e trabalhados nas atividades aqui apresentadas, em função do que é proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais - (PCN) no que se refere à pluralidade cultural. As escolhas feitas foram norteadas pelos seguintes critérios: (1) oferecer aos estudantes uma possibilidade de compreender a importância da matemática em outras culturas; (2) criar meios para que eles desenvolvam atitudes favoráveis e valorizem o conhecimento matemático.

Esta dissertação encontra-se estruturada do seguinte modo: no primeiro capítulo, é feita uma abordagem histórica da trigonometria no que diz respeito à sua origem, motivada principalmente pela astronomia. Dentro desse contexto, fala-se sobre Tales de Mileto, Pitágoras, Aristarco de Samos, Erastóstenes, Hiparco (considerado o pai da trigonometria) e, finalmente, Ptolomeu.

Os matemáticos Tales, Pitágoras, Hiparco e Ptolomeu foram escolhidos pelo fato de serem citados no livro didático do aluno relacionados com algum tópico de geometria a ser estudada nesse nível de ensino. Já Aristarco e Eratóstenes, porque li sobre seus feitos num livro cujo título é Explorando o Ensino da Matemática que ganhei por ter sido coordenador da OBMEP em 2009.

No segundo capítulo, é feita uma fundamentação matemática, onde são apresentados teoremas, definições, propriedades e demonstrações de alguns elementos geométricos, tais como feixe de paralelas, segmentos proporcionais em duas transversais, além de semelhança de triângulos − os casos de semelhança e a trigonometria no triângulo retângulo. Já no terceiro capítulo, apresentamos algumas atividades aplicadas, tanto em sala de aula como no ambiente externo da escola, relacionando assim a teoria com a prática, bem como uma reflexão concernente, por parte dos alunos, a essas atividades.

1. CONTANDO UM POUCO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

Pretende-se mostrar, neste capítulo, alguns aspectos da estreita relação entre a astronomia e a origem da trigonometria. É com esse objetivo que serão apresentados alguns fragmentos biográficos de alguns personagens dessa história: Tales de Mileto, Pitágoras, Aristarco de Samos, Erastóstenes, Hiparco (considerado o pai da trigonometria) e, finalmente, Ptolomeu. Antes desses fragmentos biográficos, serão apresentadas algumas considerações sobre astronomia em virtude de suas íntimas conexões com a origem histórica da trigonometria. Como ressalta Nogueira (2009), o nascimento da ciência se encontra estreitamente ligado à astronomia:

> O estudo dos astros – ou seja, a astronomia – foi a atividade que abriu as portas da ciência para os seres humanos. No firmamento, os primeiros homens e mulheres, ainda na pré-história, perceberam a existência de mecanismos e ciclos específicos que se refletiam em suas atividades terrenas e eram marcados pela posição das estrelas. (NOGUEIRA, 2009, p. 17).

Ainda segundo ele, a astronomia colocada na base da ciência influenciou os mais diversos campos do conhecimento científico. Porém, ao longo do tempo, com a fragmentação do saber em disciplinas, as noções básicas de astronomia também ficaram fragmentadas. É fácil perceber as consequências disso, pois as primeiras noções sobre o Sistema Solar são vistas pelos alunos em Geografia, as leis dos movimentos planetários em Física mais as novas descobertas sobre a origem do universo, o aluno da educação básica não vê em lugar algum. Desse modo, pode-se perguntar: o que instigou a tantas pessoas do mundo em diferentes épocas consideradas as mais inteligentes, a desenvolver todo esse conhecimento?

Nossos alunos, na maioria das vezes, são desmotivados porque a eles são transferidos enormes quantidades de conhecimentos, falando-se pouco ou nada do que motivou tudo aquilo. Os PCN ressaltam a necessidade de um ensino da matemática que busque a superação dessa fragmentação:

> Assim tanto a História da Matemática como os estudos da Etnomatemática são importantes para explicar a dinâmica da produção desse conhecimento, histórica e socialmente. Desse modo, é possível visualizar melhor a dimensão da História da Matemática no currículo da escola fundamental

como um campo de problemas para construção e evolução dos conceitos e como um elemento de integração da Matemática com o tema Pluralidade Cultural. (PCN, MATEMÁTICA; 1998. p. 33).

Nesse sentido, conhecer as motivações e as dificuldades enfrentadas por diferentes estudiosos para produzir e organizar esse conhecimento pode estimular os alunos no desenvolvimento e na ampliação do raciocínio relacionando ideias que aparentemente não têm ligação nenhuma.

1.1 Tales de Mileto

De acordo com Boyer e Eves , sobre a vida e obra Tales de Mileto (624 – 548 a.E.C.) sabe-se muito pouco. Acredita-se que ele nasceu na cidade de Mileto na Ásia menor, atual Turquia, e faleceu na mesma cidade. Segundo a tradição, parece que Tales iniciou sua vida como mercador. Sobre Tales, são contadas diversas estórias. Numa delas, relata-se que ele monopolizou as prensas de azeite num ano em que a colheita de azeitonas foi abundante e que, alugando-as em momento oportuno, tornou-se muito rico. Desse modo, conseguiu dedicar-se aos estudos viajando aos grandes centros antigos de conhecimento, Egito e a Babilônia, onde pôde adquirir conhecimentos sobre matemática e astronomia. Segundo Boyer (2010, p. 34) e Eves (2011, p. 95), no Egito aprendeu geometria e na Babilônia possivelmente esteve em contato com tabelas e instrumentos astronômicos. Voltando para Mileto, recebeu o nome de estadista, filósofo, engenheiro, homem de negócio, matemático e astrônomo. Foi considerado o primeiro filósofo e um dos sete sábios da antiguidade.

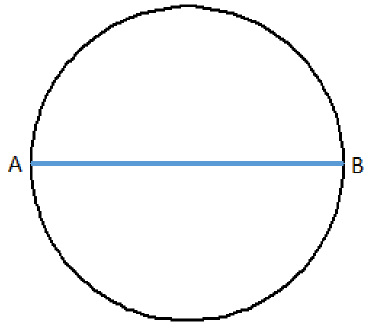
1.1.1 As realizações de Tales de que se tem notícia

Segundo o historiador Heródoto, Tales previu um eclipse solar que ocorreu no ano de 585 a.E.C., assombrando seus contemporâneos. Mas, segundo Eves, não existem evidências historiográficas que respaldem essa afirmação. Para Nobre, essa informação não deixa de ser intrigante, pois estudos astronômicos atuais confirmam que ocorreu um eclipse do Sol no dia 28 de maio do ano 585 a.E.C. No entanto, historiadores da atualidade, tais como Neugebauer, puderam comprovar que Tales não teria base científica para fazer tal previsão, pois era preciso que ele tivesse amplo conhecimento de conceitos geográficos, como o de latitude que seria indispensável para determinar a ocorrência de um eclipse. De acordo com esses historiadores, caso ele tenha realmente feito tal previsão, isso não passou de um golpe de sorte.

Muitos autores representantes da historiografia tradicional, como Eves e Boyer, afirmam que Tales é o primeiro personagem ao qual lhes são atribuídas algumas descobertas matemáticas, sendo, por esse motivo, considerado o primeiro matemático verdadeiro que deu origem a organização dedutiva da geometria. São a ele atribuídos, por esses autores, os seguintes resultados:

1. Um círculo é bissectado por seu diâmetro, conforme figura 1 abaixo.

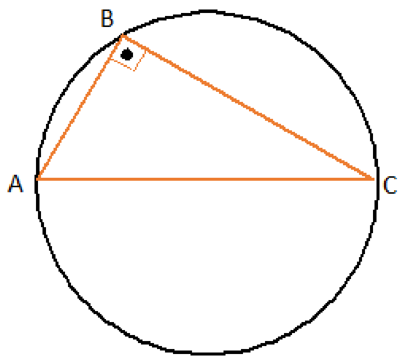
Figura 1 – Círculo bissectado por seu diâmetro



Fonte: Autor, 2014

2. O teorema segundo o qual um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto. Ver figura 2.

Figura 2 – Ângulo inscrito num semicírculo

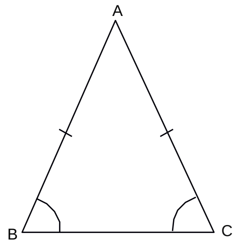


Fonte: Autor, 2014

Todo ângulo reto é inscritível numa semicircunferência e, reciprocamente, todo ângulo inscrito numa semicircunferência, com os lados passando pelas extremidades, é ângulo reto.

3. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes. Veja figura 3 a seguir.

Figura 3 – Triângulo isósceles

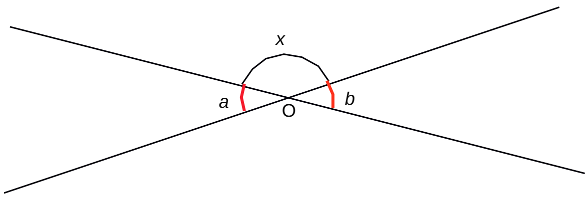


Fonte: Autor, 2014

Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes.

4. Os pares de ângulos formados por duas retas concorrentes são congruentes. Conforme indicado na figura 4. (Esse resultado é conhecido como ângulos opostos pelo vértice)

Figura 4 – Ângulos opostos pelo vértice

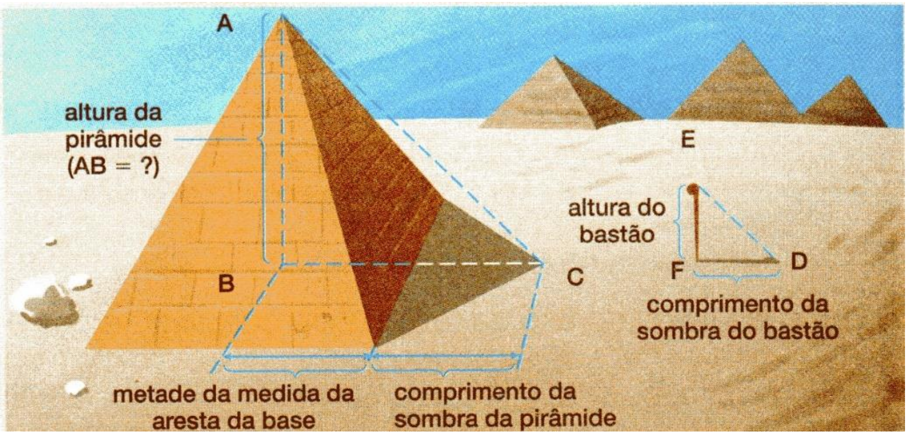


Fonte: Autor, 2014

5. Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são respectivamente congruentes a dois ângulos e um lado do outro, então, esses triângulos são congruentes.

Alguns autores da historiografia tradicional da matemática associam a figura de Tales com o cálculo da altura de uma pirâmide no Egito, como podemos ler em Eves (2011, p. 95): “Diz-se que ele viveu por algum tempo no Egito, e que despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra.” Contudo, vale notar que esse autor não assegura a autenticidade desse fato quando inicia a frase com a palavra “diz-se”. (Veja a figura 5.)

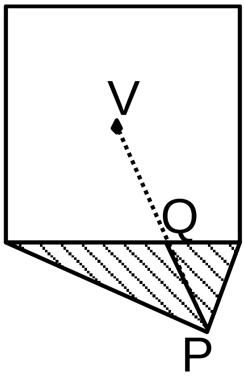
Figura 5 – Pirâmide



Fonte: A conquista da matemática, 9º ano, pag. 197.

Recentemente, autores como Nobre que lidam com a história da matemática de uma maneira mais crítica, descartam a possibilidade de que Tales tenha realmente realizado essa façanha, alegando que a interpretação do feito de Tales de acordo com a figura 5 acontece raramente com tal exatidão. A sombra pode apresentar-se de modo que não possibilite a realização do cálculo sendo, portanto, impossível que ele tenha calculado tal altura. (Ver figura 6, que ilustra tal situação.)

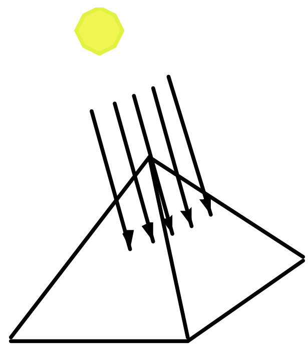
Figura 6 – Caso geral



Fonte: Autor, 2015

Ou ainda, os raios solares são incididos verticalmente sobre a pirâmide, fazendo com que a esta não projete sua sombra no chão e sim sobre si mesma. Ver figura 7.

Figura – 7 Sombra não projetada no chão



Fonte: Autor, 2015

Em vista de tudo isso, é natural que se conclua que a história não aconteceu do modo que foi contada, ou então que Tales tenha tido um puro ato de sorte como no caso da predição do eclipse. Dentro desse contexto, não se pode precisar sobre as verdadeiras contribuições de Tales a respeito desse tema.

1.2 Pitágoras

De acordo com a historiografia tradicional Boyer e Eves, Pitágoras de Samos viveu por volta de 580-500 a.E.C., foi um profeta e místico nascido em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso próxima de Mileto, lugar onde nasceu Tales. Foram escritas diversas biografias de Pitágoras na antiguidade, mas todas se perderam, inclusive uma escrita por Aristóteles. Atualmente a dificuldade encontrada para descrever a figura de Pitágoras advém do fato de que a ordem por ele fundada ter sido comunitária e também secreta. O que temos é uma biografia que está envolta em lendas e fatos não comprovados. Na verdade, não é fácil fazer distinção entre história e lenda a respeito de Pitágoras, pois, para o povo, ele representava muitas coisas, tais como: filósofo, matemático, astrônomo, santo, milagreiro, profeta, charlatão e mágico, tornando-se um personagem muito influente da história, uma vez que, iludidos ou inspirados, seus seguidores disseminaram seus ensinamentos e crenças pelo mundo grego.

Talvez pela semelhança entre seus interesses, alguns relatos afirmam que Pitágoras poderia ter sido discípulo de Tales, o que, segundo Boyer (2010), é pouco provável dada uma diferença de aproximadamente 50 anos entre suas idades. Pitágoras era um filósofo e místico, enquanto Tales era homem de negócio. A semelhança dos interesses entre eles era devida ao fato de Pitágoras também ter viajado pela Babilônia e Egito, onde adquiriu conhecimentos sobre matemática, astronomia e também de ideias religiosas. No século em que nasceu Pitágoras, surgiram também grandes condutores de povos e criadores de religião, tais como: Gautama Buda, Zaratustra (Zoroastro), Confúcio e Lao Tsé, sendo este século considerado crítico no que diz respeito ao desenvolvimento da religião e também da matemática.

Segundo Eves, quando voltou para Samos, Pitágoras encontrou a ilha governada pelo ditador Polícrates e a Jônia dominada pelos Persas. Então, Pitágoras partiu para Crotona, uma colônia grega no sul da Itália, onde fundou sua sociedade secreta conhecida como Escola Pitagórica, cujo lema era “Tudo é número” e que, além de ser um centro de estudos de filosofia, matemática e ciências naturais, era onde realizavam cerimônias e ritos secretos. Pitágoras conseguiu, dessa forma, criar uma sociedade religiosa, filosófica e política. Os discípulos formados ocupavam os melhores cargos no governo, conscientes de seus conhecimentos, desprezavam as pessoas ignorantes e apoiavam os aristocratas. Revoltadas, as pessoas destruíram e incendiaram os prédios da escola. Pitágoras fugiu e exilou-se em Metaponto, ao norte na Lucânia onde se presume que tenha morrido em torno de 500 a.E.C. com idade entre 75 e 80 anos.

1.2.1 As contribuições de Pitágoras e dos pitagóricos

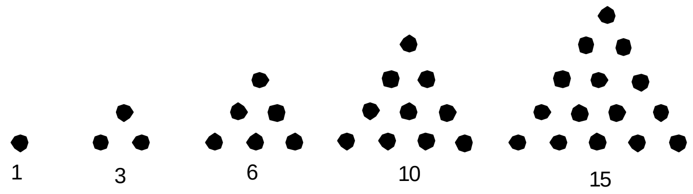
Segundo Boyer e Eves, na ordem fundada por Pitágoras, o conhecimento adquirido e as descobertas eram comuns, ou seja, não eram atribuídos a nenhum membro específico, de modo que não se pode falar ao certo sobre a obra de Pitágoras. Ao invés disso - ressaltam esses autores - é preferível se referir às contribuições dos pitagóricos, apesar de na antiguidade ter-se o costume de atribuir o mérito das descobertas ao mestre.

Ainda que muitos não considerem completamente que Pitágoras tenha dado alguma contribuição a essa ciência, é fato que os pitagóricos exerceram um importante papel na história da matemática, pois os elementos de aritmética e geometria no Egito e na Mesopotâmia eram basicamente aplicações de exercícios numéricos particulares, havendo pouca estrutura intelectual, e possivelmente nada que caracterizasse uma abordagem filosófica de princípios. Ao que parece, foi Tales quem fez algum progresso nesse sentido. Entretanto, a história tradicional, sustenta o posicionamento de Eudemo e Proclus de que foram os pitagóricos que deram nova ênfase à matemática, pois esta se relacionava mais com o amor e à sabedoria do que a qualquer outra coisa. Em tempo algum, a matemática desempenhou papel tão expressivo na vida e na religião, senão entre os pitagóricos.

É atribuído aos pitagóricos ter descoberto propriedades interessantes dos números que eram chamados por eles de números figurados. Vejamos dois exemplos:

Números triangulares,

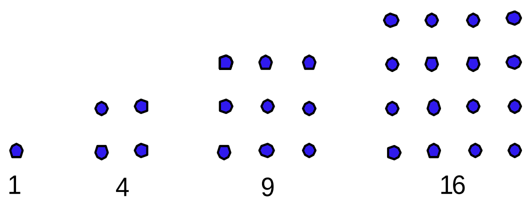
Figura 08 – Números triangulares



Fonte: Autor, 2014

Números quadrados

Figura 09 – Números quadrados



Fonte: Autor, 2014

São atribuídos também aos pitagóricos os números perfeitos, deficientes e abundantes que se associam de forma mística sendo essencial para enfatizar fatos numerológicos. Um número se diz perfeito quando é igual à soma de seus divisores próprios; deficiente, quando excede a soma de seus divisores próprios e abundante quando é menor que a soma de seus divisores próprios. Desse modo, Deus criou o mundo em seis dias, que é um número perfeito. Vejamos que, 1 + 2 + 3 = 6. Em contrapartida, de acordo com a observação de Alcuíno (735-804), toda a raça humana descende das oito almas da arca de Noé, sendo essa criação imperfeita porque 8 é deficiente, já que $1 + 2 + 4 < 8$.

1.2.2 O teorema que é atribuído a Pitágoras

Esse teorema diz que, em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

De acordo com Boyer e Eves, não se conhece nenhuma prova desse teorema que tenha sido dada por algum pitagórico e é pouco provável que ela exista. O teorema de Pitágoras pertence ao contexto dos números figurados relacionados ao que se conhece hoje como ternos pitagóricos, problema de se encontrar dois números quadrados cuja soma também seja um número quadrado e não deveria ser, portanto, um resultado geométrico.

Sabe-se ainda que a civilização mesopotâmica começou por volta de 3500 a.E.C., certamente a mais antiga do mundo. Foi na Mesopotâmia, atual Iraque, que os babilônios criaram um meio de escrita chamada cuneiforme e deixaram registrados em tabletes de argila muitos problemas matemáticos com suas respectivas soluções. Num desses tabletes de cerca de 1800 a.E.C conhecido como tábula de Plimpton 322, (o nome deve-se a George Arthur Plimpton, que colecionava itens raros e essa tábula era o item 322 de sua coleção), encontra-se o registro mais antigo sobre o teorema de Pitágoras. Ela contém uma tabela de ternos pitagóricos. Veja figura 10 abaixo.

Figura 10 - Tábula de Plimpton 322

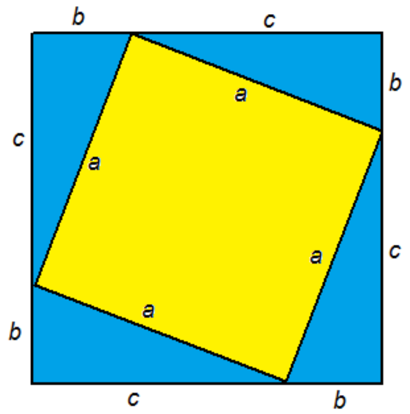
Fonte: Disponível em:<http://isaw.nyu.edu/exhibitions/before-pythagoras/items/plimpton-322/>. Acesso em 21.01.2015

Esse fato nos mostra que o teorema que recebe o nome de Pitágoras já era conhecido pelos babilônicos, cerca de mil anos antes de Pitágoras. De acordo com Eves: “Desde os tempos de Pitágoras, muitas demonstrações do teorema em consideração foram dadas. E. S. Loomis, na segunda edição de seu livro, *The Pythagorean Proposition*, coletou e classificou nada menos do que 370 dessas demonstrações.”

Vejamos a prova pela área do quadrado

Considere a figura 11 seguinte que mostra um quadrado cujo lado mede *b* + *c* circunscrito a outro quadrado cujo lado mede *a*. Observe que a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quatro triângulos com a do quadrado menor.

Figura 11 – Quadrado



Fonte: Autor, 2014

Daí, temos:

$$(b+c)^2 = a^2 + 4.\frac{1}{2}bc$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc.$$

Subtraindo *2bc* em ambos os lados obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Isso é o que diz o suposto Teorema de Pitágoras.

Considera-se ter sido os pitagóricos os primeiros a acreditarem poder utilizar a matemática para entender as leis da natureza. Proclus atribui a Pitágoras a construção dos sólidos regulares e a teoria das proporcionais. Sabe-se que essa afirmação está de acordo com o pensamento pitagórico e que na Mesopotâmia ele teve contato com as médias, aritmética, geométrica, harmônica e a razão áurea.

O símbolo utilizado pela sua escola era o pentagrama, que Pitágoras descobrira possuir propriedades bem interessantes. Tal pentagrama era obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular. Pelas intersecções dessas diagonais, obtém-se um novo pentágono regular proporcional ao primeiro pela razão áurea. A esse respeito Johannes Kepler (1571-1630) escreveu:

A geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar joia preciosa. (KEPLER *apud* BOYER, 2010, p. 37)

1.2.3 A incomensurabilidade

Existem muitas lendas a respeito da descoberta da incomensurabilidade de dois segmentos.

A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos. Em primeiro lugar porque parecia desferir um golpe mortal na filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros. Além disso, parecia contrária ao senso comum, pois intuitivamente havia o sentimento de que toda grandeza poderia ser expressa por algum número racional. [...] Pois não só ela parecia perturbar a suposição básica da escola, de que tudo dependia dos números inteiros, como também porque a definição pitagórica de proporção, assumindo como comensuráveis duas grandezas quaisquer similares, fazia com que todas as proposições da teoria pitagórica das proporções se limitassem a grandezas comensuráveis, invalidando sua teoria geral das figuras semelhantes. (EVES, 2011, p.106, 107)

Segundo Eves, particularmente essa descoberta, teria causado um escândalo no meio pitagórico e, de acordo com uma lenda, levado um dos pitagóricos a ser perseguido e, se não morto, dado como morto.

Mas atualmente, historiadores influentes têm discordado muito da história tradicional. De acordo com Roque, nas últimas décadas esses mitos têm sido muito questionados pela história da Matemática. Segundo Roque (2012, pp. 74-75), alguns autores não só duvidam de que os segmentos incomensuráveis tenham sido descobertos pelos pitagóricos, como também acreditam que não é certa nem mesmo a relação entre o Teorema de Pitágoras e a descoberta dos irracionais. Sabendo que os babilônios e chineses já conheciam o teorema e, no entanto, não chegaram a essa conclusão.

1.3 Aristarco

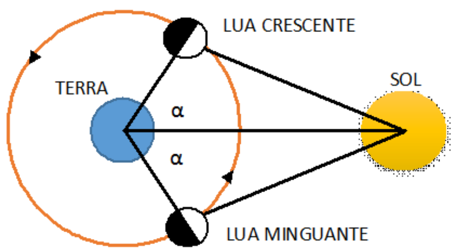
De acordo com Boyer e Eves, Aristarco de Samos por volta de (310 - 230 a.E.C), foi um astrônomo e matemático, que segundo Arquimedes e Plutarco fez uma das conjecturas astronômicas mais ousadas da antiguidade, por volta do século III a.E.C. na qual apresentava a Terra em movimento ao redor do Sol. Inclusive, o primeiro a propor que o nosso Sistema Solar era heliocêntrico e não geocêntrico. Tudo o que foi escrito por ele a respeito desse assunto, se perdeu com a destruição da Biblioteca de Alexandria, suas ideias só ficaram conhecidas porque foram citadas por Arquimedes no seu *Psammites*. Sua teoria heliocêntrica só teria reconhecimento e validade mais de um milênio e meio depois com Nicolau Copérnico.

1.3.1 Contribuições de Aristarco

Segundo Boyer e Ávila, apenas uma das obras de Aristarco chegou até nós, *Sobre os tamanhos e distância entre o Sol e a Lua* escrita talvez por volta de 260 a.E.C. Nela, Aristarco usa uma geometria elegante e muito simples para medir a distância Terra-Sol e Terra-Lua. Ele concluiu que o Sol estava a cerca de 20 vezes mais distante da Terra que a Lua. Atualmente, sabemos que essa distância é cerca de 400 vezes. Apesar do resultado, o procedimento de Aristarco estava correto, os instrumentos para medição de ângulos da época é que não davam uma medida precisa, o que nos leva refletir em todo conhecimento que foi perdido ao longo do tempo. Atualmente sabe-se que em sua homenagem deram seu nome a uma cratera lunar.

Vejamos como ele procedeu para calcular as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua. Ele sabia que existiam duas posições da Lua em sua órbita que para um observador terrestre apresentava uma metade iluminada e a outra escura, que conhecemos como quarto crescente e quarto minguante. (Veja a figura 12.)

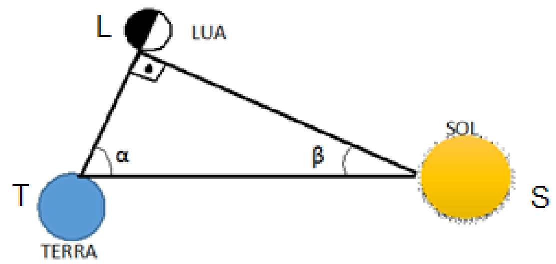
Figura 12 – Esquema Terra, Lua e Sol



Fonte: Autor, 2014

Quando isso ocorre tem-se o triângulo retângulo Terra-Lua-Sol, com a Lua no vértice do ângulo reto (veja a figura 13).

Figura 13 – Triângulo retângulo, Terra-Lua-Sol



Fonte: Autor, 2014

Aristarco mediu o ângulo $\alpha = L\hat{T}S$ encontrando o valor 87° logo, o ângulo $\beta = L\hat{S}T$ teria medida igual a 3°. O que ele precisava saber agora era o valor da razão TS/TL, que ele sabia ser a mesma para todos os triângulos semelhantes a ele. Uma maneira de se determinar essa razão é observar que:

$$\frac{TL}{TS} = cos\alpha.$$

Como $cos\alpha = cos87° \neq 0$, essa igualdade é equivalente a

$$\frac{TS}{TL} = \frac{1}{cos\alpha}.$$

Consultando uma tabela de razões trigonométricas, temos que $cos87° = 0{,}052$, daí temos

$$\frac{TS}{TL} = \frac{1}{0{,}052} = 19{,}23.$$

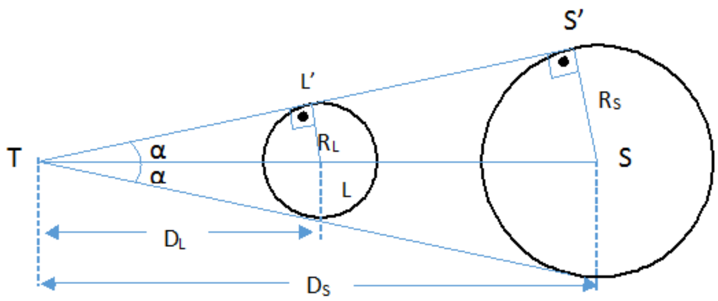
Chegando, dessa maneira, à conclusão de Aristarco de que o Sol está cerca de 20 vezes mais distante da Terra que a Lua.

Com base na sombra projetada pela Terra num eclipse lunar, chegou à conclusão de que a Lua tem diâmetro três vezes menor do que o da Terra, tendo este valor em vista, deduziu que o diâmetro do Sol é 20 vezes maior do que o da

Lua e cerca de 7 vezes maior que o da terra. Hoje sabemos que o diâmetro da Lua é aproximadamente 3,75 menor que o da Terra e que o diâmetro da Terra é aproximadamente 0,00916 do diâmetro do Sol, não chegando, portanto, nem a um centésimo do diâmetro dele.

Como Aristarco fez para chegar a essas conclusões? Ele observou que o ângulo sob o qual via a Lua era o mesmo sob o qual via o Sol, determinando, dessa forma, que a Lua e o Sol têm o mesmo tamanho angular 2α. Fato esse, que pode ser comprovado num eclipse solar, no qual o Sol fica totalmente encoberto pela Lua. Veja a figura 14 que ilustra este fato.

Figura 14 – Eclipse solar



Fonte: Autor, 2014

Com os recursos que ele tinha na época, estimou que o ângulo 2α media 2°, hoje sabemos que, na verdade, ele mede cerca de 0,5°. Mas, esse fato não interfere no resultado que vamos obter. Considere os triângulos TLL' e TSS' temos que:

$$sen\alpha = \frac{R_L}{D_L} = \frac{R_S}{D_S}$$

Daí, temos que

$$\frac{D_S}{D_L} = \frac{R_S}{R_L}$$

Aristarco sabia que

$$\frac{D_S}{D_L} = \frac{TS}{TL} \cong 20,$$

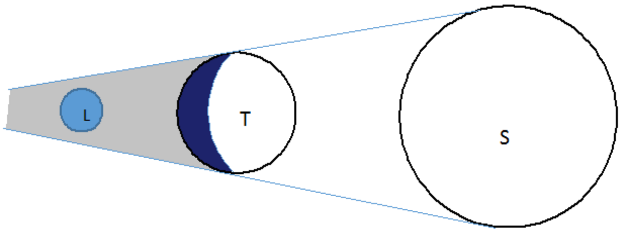
pois, os triângulos TLL' e TSS' são semelhantes. Logo, tem-se que

$$\frac{R_S}{R_L} \cong 20 \Longrightarrow R_S \cong 20R_L.$$

Portanto, para Aristarco, o raio do Sol era cerca de vinte vezes o raio da Lua.

Relacionando as distâncias e raios da Lua e do Sol com o raio da Terra para fazer tais relações, Aristarco, observou o que acontece num eclipse lunar, que é quando a Lua atravessa o cone da sombra da Terra. Veja figura 15 a seguir:

Figura 15 – Eclipse lunar

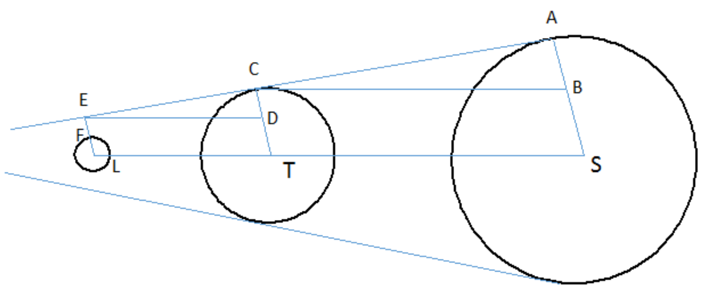


Fonte: Autor, 2014

Com base no tempo que a Lua gastou para atravessar a sombra, ele calculou que o diâmetro do cone de sombra da Terra, na altura da Lua, era 8/3 do diâmetro da Lua.

Consideremos agora a figura 16 abaixo.

Figura 16 – Triângulos semelhantes



Fonte: Autor, 2014

Nela os pontos $L,\ T$ e S, são respectivamente os centros da Lua, da Terra e do Sol. E seus respectivos raios são os segmentos cujas medidas são dadas por $LF = R_L$, $TC = R_T$ e $SA = R_S$, o segmento que mede LE é o raio do cone de sombra na altura da Lua, de modo que $LE = 8R_L/3$.

Veja que os triângulos CDE e ABC são semelhantes, daí temos que

$$\frac{CD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Longrightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AB}{BC} \qquad (i)$$

Observe ainda que

$$CD = TC - TD = R_T - LE \Rightarrow CD = R_T - 8R_L/3;$$

$$AB = SA - SB \Rightarrow AB = R_S - R_T;$$

$$DE = TL \Longrightarrow DE = D_L \text{ e } BC = TS \Rightarrow BC = D_S.$$

Substituindo-se os valores obtidos em (i) obtemos,

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{D_L} = \frac{R_S - R_T}{D_S} \qquad (ii)$$

Lembrando que,

$$sen\alpha = \frac{R_L}{D_L} = \frac{R_S}{D_S} = a \qquad e \qquad \frac{D_S}{D_L} = \frac{TS}{TL} = b,$$

teremos

$$D_S = bD_L, \qquad R_S = aD_S = abD_L, \quad R_L = aD_L.$$

De modo que a igualdade (ii) pode ser escrita como

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}aD_L}{D_L} = \frac{abD_L - R_T}{bD_L}.$$

Daí, temos

$$R_T + \frac{R_T}{b} = \frac{8}{3}aD_L + aD_L.$$

Simplificando,

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right)R_T = \frac{11}{3}aD_L,$$

donde segue que

$$D_L = \frac{3(b+1)}{11ab}R_T,$$

portanto temos

$$D_S = bD_L = \frac{3(b+1)}{11a}R_T,$$

$$R_S = abD_L = \frac{3(b+1)}{11}R_T$$

e

$$R_L = aD_L = \frac{3(b+1)}{11b}R_T.$$

Utilizando os dados de Aristarco substituindo-se agora $a = sen\,1° \cong 0{,}017$ e $b \cong 20$, vamos obter as grandezas D_L, D_S, R_L e R_S em função do raio da terra R_T.

$$D_L \cong 16{,}8R_T,\ D_S \cong 337R_T,\quad R_L \cong 0{,}29R_T,\quad R_S \cong 5{,}7R_T.$$

Fazendo as contas, com os valores mais aproximados da realidade $a = sen\,0{,}25° \cong 0{,}0044$ e $b \cong 400$, obtemos:

$$D_L \cong 62R_T,\ D_S \cong 24855R_T,\quad R_L \cong 0{,}27R_T,\quad R_S \cong 109R_T.$$

Que são valores mais próximos dos encontrados atualmente.

1.4 Eratóstenes

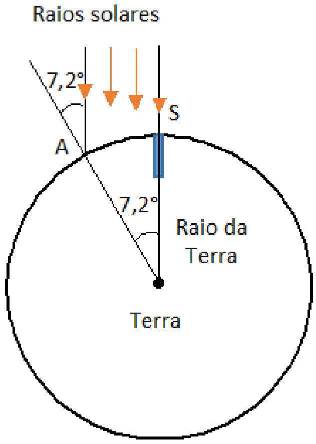
De acordo com Boyer, Eves e Ávila, Eratóstenes, nasceu em Cirene ao norte da África atual Líbia por volta de 276 a.E.C. Foi poeta, matemático, astrônomo, geógrafo, historiador, filósofo, atleta e bibliotecário. Estudou em Alexandria, no Egito e em Atenas onde passou a maior parte de sua juventude. Foi também em Atenas, que Eratóstenes adquiriu grande fama pela diversidade de seus conhecimentos. Atendendo ao chamado do rei Ptolomeu III, mudou-se para Alexandria com o encargo de administrar a Biblioteca e ser tutor de seu filho, o futuro rei Ptolomeu Filopator. Foi no reinado de Ptolomeu III, no período 246 a.E.C. a 222 a.E.C., e sob o comando de Eratóstenes, que a Biblioteca obteve um grande crescimento, chegando a obter 480 000 obras. Acredita-se que a Biblioteca tenha chegado a obter cerca de 700 000 obras. A Biblioteca foi destruída com a invasão dos árabes no século VII E.C.

1.4.1 Contribuições de Erastóstenes

De acordo com Boyer e Ávila, as obras matemáticas de Eratóstenes perderam-se, não chegando até nós. Sabe-se que ele ficou conhecido por ter sido o primeiro na história da ciência a determinar o tamanho da terra. Ele chegou a tal conclusão usando um método engenhoso e muito simples. Ele sabia que no primeiro dia de verão, na cidade de Syene (ou Assuã) no Egito, ao meio dia a luz do sol incidia verticalmente no fundo de um poço mostrando dessa forma que o sol estava diretamente acima da cidade. E usando cálculos simples mostrou que em Alexandria o ângulo que a luz do sol fazia com uma vara colocada na vertical era de 7,2°, o que corresponde a 1/50 da circunferência que mede 360°. Viajava-se muito de Syene para Alexandria e sabia-se que a distância entre essas cidades era de 5 000 estádios[1]. Utilizando esses dados, Eratóstenes calculou que a terra tinha $50\ x\ 5000\ =\ 250\ 000$ estádios. Portanto, o encontrado por ele equivale atualmente a aproximadamente 46 250 km o que é bastante razoável, sabendo-se que era muito difícil para Erastóstenes medir, com a tecnologia que tinha na época, a distância entre dois pontos sobre a superfície da terra. O valor atual pela linha do equador é de aproximadamente 40 053,84 km.

Vamos entender matematicamente como fez Eratóstenes para calcular o comprimento da terra. (Ver figura 17.)

Figura 17 – Raios solares incidindo verticalmente num poço em Syene



Fonte: Autor, 2014

Usando uma regra de três simples pelo fato da proporcionalidade entre arcos e ângulos, obtemos

$$\frac{C}{\widehat{AS}} = \frac{360°}{7{,}2°},$$

onde, C é o comprimento da circunferência da Terra. Daí, tem-se

$$\frac{C}{5000} = 50.$$

Como 1 estádio equivale a 185 m, conclui-se que

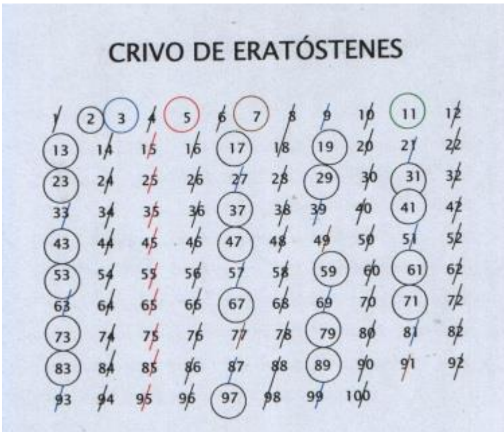
$$C = 250\ 000 \text{ estádios} \cong 250\ 000\ .\ 185 \cong 46\ 250\ 000 \text{ metros.}$$

Portanto, o comprimento da circunferência da terra é aproximadamente $46\ 250$ km.

[1] Segundo a *Royal Geographical Society of London*, um estádio vale 203 jardas inglesas, ou 185,6 metros. Foi adotada a aproximação de 185 metros

Eratóstenes é bem conhecido dos matemáticos, pois adquiriu grande fama em aritmética graças a um procedimento de listar os números primos até o limite desejado. Tal método é conhecido como Crivo de Eratóstenes. Aplica-se o método da seguinte forma: com os números dispostos em ordem de 1 até n, cancela-se o 1, em seguida a partir do 2 (exclusive) cancelam-se os números de dois em dois, agora a partir do 3 (exclusive) cancelam-se os números de três em três e continua-se desse modo até cancelar cada n-ésimo número a partir de n (exclusive). Tal precedimento está ilustrado na figura 18 a seguir, para n = 100.

Figura 18 – Crivo de Eratóstenes



Fonte: Disponível em: <https://erealityhome.wordpress.com/2009/03/21/250-ac-crivo-de-eratostenes-p-numeros-primos-2/>. Acesso em 21.01.2015

Mesmo com tanto sucesso como estudioso e intelectual, o fim de Eratóstenes foi trágico. Relata-se que, em torno 194 a.E.C. com a idade avançada, ele ficou quase cego em decorrência de uma oftalmia, com desgosto, induziu sua própria morte parando de alimentar-se.

Na revista Cálculo, edição 39 de abril de 2014, num artigo cujo título é *Duas cidades duas turmas e a circunferência da Terra,* duas turmas de 9º ano, uma do Colégio Vital Brazil em São Paulo com 40 alunos, outra da Escola municipal Pará, no Rio de Janeiro com 38 alunos, reuniram-se, em um dia de sol, para refazer o que deixou o astrônomo grego Eratóstenes famoso. Os professores Ayrton Olivares e Juliana Jong, do Colégio Vital Brazil e a professora Cláudia Moura, da Escola Municipal Pará foram convidados pela revista Cálculo para realizar essa tarefa.

Então, no dia 21 de fevereiro, às 11 horas da manhã, a professora Cláudia reuniu sua turma, munidos de trena, cabo de vassoura, régua, transferidor, esquadro, celular e calculadora, daí eles utilizaram a bússola do celular para encontrar e marcar uma linha até um ponto X na direção do norte magnético. Em seguida, a professora utilizou o transferidor e adicionou alguns graus ao ponto X, a fim de determinar o norte verdadeiro, logo após, traçaram outra linha, indicando o meridiano local. Ao mesmo tempo, em São Paulo, Ayrton e Juliana reuniram os alunos na quadra de esportes da escola e lá realizaram os mesmos procedimentos que a turma do Rio.

Com tudo pronto, ambas as turmas ficaram esperando o sol chegar ao ponto mais alto de onde estavam o meio dia, momento aproximado em que a sombra do cabo de vassoura chegaria no meridiano o que ocorreu às 12:00h no Rio, então Cláudia enviou uma mensagem de celular para a turma de São Paulo dizendo: "Chegou". A partir daí ela usa o transferidor para determinar o ângulo formado pelo cabo e os raios solares. E às 12h e 07min, em são Paulo, eles mediram o comprimento da sombra, a partir daí, trocaram as informações via mensagens:

Rio de Janeiro, comprimento do cabo 1,69 m e da sombra 28,5 cm.

São Paulo, comprimento do cabo 1,18 m e da sombra 30 cm.

Cada turma em suas salas fizeram as contas e concluíram que a circunferência da Terra era de aproximadamente 28.000 km bem longe dos 40.075 km. O que deu errado? Depois de revisar e pensar, chegaram à conclusão de que a Terra gira e isso influenciou nos comprimentos das sombras. Além disso, perceberam que a soma dos ângulos internos do triângulo encontrado era maior que 180°. Então os professores concluíram que, para se ter uma boa estimativa, as turmas precisavam de medidas que os levassem a um ângulo de aproximadamente 3°.

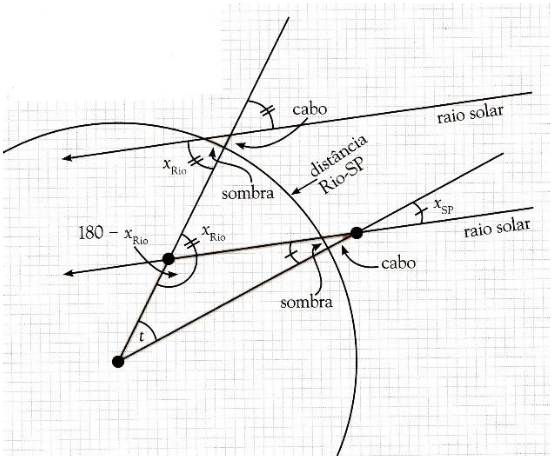
Algumas versões da história relatam que Eratóstenes, sem uma teoria bem estabelecida sobre triângulos e todo aparato tecnológico, estimou que a Terra tinha aproximadamente 46.516 km, dando uma lavada nas pessoas em pleno século 21.

Para aplicar o método de Eratóstenes, usando as medições da sombra e do cabo, o aluno imagina que corta a Terra em um círculo máximo. Para isso, imaginou que as cidades estivessem no mesmo meridiano, pois a circunferência do meridiano é a mesma da Terra. Então ele faz o desenho de um círculo representando a circunferência da Terra e marca São Paulo e o Rio de Janeiro. Daí, ele desenha os cabos de vassoura em cada cidade, as sombras e os raios solares, indica o ângulo formado pelo cabo e o raio solar por x_{SP}, no caso de São Paulo e por x_{RIO}, no caso do Rio. Nos dois casos determina o ângulo formado calculando o valor da tangente conforme indicado abaixo:

$$\frac{sombra}{cabo} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \tan x.$$

Em seguida, consulta uma tabela trigonométrica, ele também prolonga cada cabo até o centro da Terra, formando-se assim um triângulo. Veja a figura 19 abaixo.

Figura 19 – Representação gráfica do problema



Fonte: Revista Cálculo, edição 39, abril de 2014

Ele sabe agora pelo teorema de Tales e pela propriedade de ângulos alternos internos que o ângulo x_{RIO} forma 180° com um dos ângulos do triângulo. Ele nota que x_{SP} é um dos ângulos do triângulo, daí ele usa o fato de que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180° para determinar o ângulo desconhecido que ele chamou de t.

$$(180° - x_{RIO}) + x_{SP} + t = 180°$$

$$t = x_{RIO} - x_{SP}$$

Depois de determinar t o aluno usa o fato de a Terra ser uma esfera, e como um círculo tem 360°, ele diz que proporção entre o arco d (distância entre as duas cidades) e o ângulo t é igual à proporção entre a circunferência da Terra T e 360°. Usando uma regra de três simples ele conclui que:

$$\frac{t}{360°} = \frac{d}{T} \Longrightarrow T = \frac{360°.d}{t}$$

A conclusão a que se chega é que, Eratóstenes não podia dar-se ao luxo de errar tanto como os alunos de nosso século, pois ele não tinha meios de confirmar seu resultado. Mas, assim como ele, as duas turmas conseguiram mais que resultados precisos, aplicaram um método que mostra como é grande o poder daqueles que usam matemática, mesmo que objeto de estudo seja tão imenso, como um planeta.

1.5 Hiparco

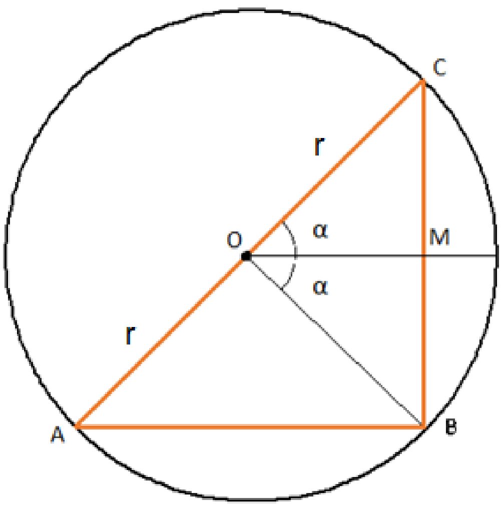
De acordo com Boyer e Eves, Hiparco de Nicéia, por volta de (180-125 a.E.C.) foi matemático e possivelmente o mais notável dentre os astrônomos da antiguidade. Hiparco, além de fazer a transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu, destacou-se ainda pela rigorosidade de suas observações e segurança das conclusões a que chegou. Apesar de se fazer referência a um equinócio vernal registrado por Hiparco em Alexandria no ano 146 a.E.C., foi no observatório de Rodes, um importante centro comercial da época, que ele fez as mais relevantes observações astronômicas. As principais contribuições em astronomia que se atribui a Hiparco são: a sistematização de dados empíricos provenientes dos babilônios; a elaboração de um catálogo com 850 estrelas; determinação da duração do dia e do ano; cálculo da paralaxe lunar, do tamanho da Lua, da inclinação da eclíptica; que se podia localizar pontos sobre a superfície terrestre por meio de suas latitude e longitude; descoberta da precessão dos equinócios, sendo esta sua principal descoberta. Presume-se ainda que ele tenha sido um dos responsáveis pela construção de sistemas planetários geométricos. Mas tudo o que sabemos sobre as obras de Hiparco é meio duvidoso, uma vez que poucos de seus escritos chegaram até nós. O que sabemos de suas contribuições científicas é proveniente de fontes indiretas.

1.5.1 Contribuições de Hiparco para a matemática

As contribuições de Hiparco para a astronomia não foram tão importantes quanto sua contribuição para o avanço da trigonometria. Pela elaboração da que foi a primeira tabela trigonométrica da história, ele ganhou o direito de ser chamado de *pai da trigonometria*. Por meio dessa tabela, introduziu na trigonometria grega a divisão da circunferência em 360 partes, cada uma delas sendo chamada de grau. Possivelmente teve essa ideia estudando a astronomia babilônica ou os escritos do astrônomo grego Hipsicles, que dividiu o dia em 360 partes. Comentando a respeito da tabela de cordas de Ptolomeu, Têon de Alexandria (século IV) atribui a Hiparco um tratado constituído de 12 livros, onde ele se ocupa da construção de uma tabela de cordas.

Segundo Giovanni Júnior, os matemáticos gregos não usavam o seno do ângulo, eles trabalhavam com a corda do arco duplo. Vejamos como calcular o seno de um ângulo α a partir do comprimento da corda do arco 2α (ou $crd2\alpha$) de um arco. Considere a figura 20 seguinte, onde $r = 60$. Devido ao fato de ele usar a matemática dos babilônios cuja base era 60.

Figura 20 – Circunferência e a corda BC do arco 2α



Fonte: Autor, 2014

$$sen\,\alpha = \frac{CM}{OC} = \frac{BC}{AC} = \frac{crd\,2\alpha}{2r} \Rightarrow crd\,2\alpha = 2r.sen\,\alpha.$$

De acordo com Eves, posteriormente, uma tábua contendo essencialmente o seno dos ângulos de 0° a 180° com variação de meio em meio grau foi construída pelo grego Ptolomeu.

1.6 Ptolomeu

De acordo com Boyer e Eves, Cláudio Ptolomeu (ou Ptolomeu de Alexandria) foi o responsável pela obra trigonométrica mais importante da antiguidade denominada *Syntaxis matemática* (ou Síntese matemática), composta de 13 livros e que por sua consistência e elegância distinguiu-se das demais obras astronômicas e tornou-se muito influente no meio científico. Por sua enorme relevância, a obra de Ptolomeu ficou sendo chamada de a coleção *maior* (magiste) para fazer distinção entre as coleções menores sobre astronomia de Aristarco e os outros autores. Depois os Árabes passaram a chamar esse tratado de *o maior.* Como o artigo o em árabe é *al,* o tratado de Ptolomeu passou a ser chamado de *Almagesto.*

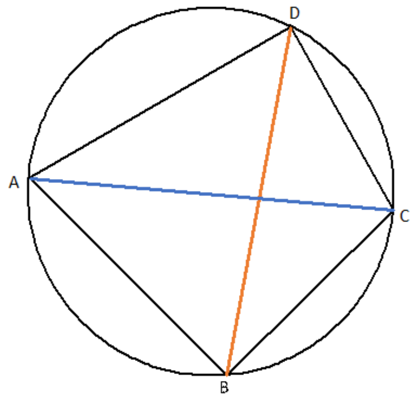
Segundo Aaboe, sobre Ptolomeu, sabe-se pouco, pois detalhes como quando ou onde nasceu, são desconhecidos, a respeito de seu trabalho o *Almagesto*, este fornece dados de observações astronômicas que permitem datá-lo por volta de 150 E.C.

No Almagesto Livro IV, cap. 6: “Dos três eclipses lunares, selecionados entre os que nós próprios, observamos com extremo cuidado em Alexandria, o primeiro aconteceu no décimo ano de Hadriano (o imperador romano), no dia 20/21 do mês egípicio Payni; o meio ocorreu meia e um quarto de hora equinocial (3/4 de hora) antes de meia noite; o eclipse foi total, e neste instante a posição verdadeira do Sol era 13 $\frac{1°}{4}$ de Taurus, muito aproximadamente”, e de maneira semelhante para os outros eclipses. Este eclipse é facilmente indentificado como o que ocorreu em 133 d. C., no dia 6 de maio, às 22 h e 7 min. G. M. T. (AABOE, 2013, pp. 176-7).

Ainda segundo Aaboe (2013), considera-se que o *Almagesto* teve para a astronomia a mesma importância que os *Elementos* de Euclides e as *Cônicas* de Apolônio tiveram em seus respectivos ramos de conhecimento matemático. Essa obra fez com que os antecessores de Ptolomeu fossem muito superficiais, fazendo com que a maioria deles se perdesse, mas que ao contrário de Euclides, Ptolomeu reconheceu todo conhecimento produzido por seus antecessores.

Segundo Boyer e Eves, supõe-se que o *Almagesto* de Ptolomeu, foi inspirado na obra *Cordas num círculo* de Hiparco. Sabemos que, em astronomia, Ptolomeu usou o catálogo de estrelas deixado por Hiparco. No entanto, não se pode afirmar que para fazer suas tabelas trigonométricas ele tenha usado as tabelas de seu renomado antecessor. O Livro I contém as tabelas trigonométricas e também uma exposição minuciosa de como obtê-la, usando-se uma importante proposição geométrica que conhecemos como teorema de Ptolomeu, cujo enunciado é o seguinte: *Num quadrilátero cíclico, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos dois pares de lados opostos.* Veja a figura 21 a seguir.

Figura 21 – Quadrilátero ABCD inscrito na circunferência



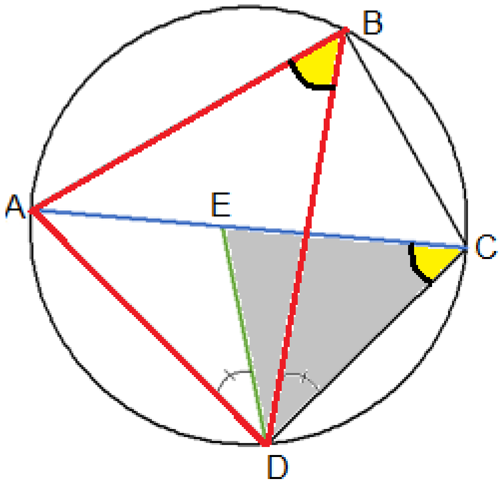
Fonte: Autor, 2014

Em notação matemática temos

$$AB.DC + AD.BC = BD.AC$$

Para demonstrar esse fato, tome um ponto E sobre a diagonal AC de modo que o ângulo $A\hat{B}E$ seja congruente ao ângulo $C\hat{B}D$. Veja a figura 22 seguinte.

Figura 22 – Ângulo $A\hat{B}E$ congruente ao ângulo $C\hat{B}D$



Fonte: Autor, 2014

Observe agora que os triângulos BCE e ADB são semelhantes, pois os ângulos $E\hat{B}C$ e $A\hat{B}D$ são congruentes por construção e os ângulos $A\hat{C}B$ e $A\hat{D}B$ são congruentes porque subtendem o mesmo arco. Daí, obtemos,

$$\frac{BC}{BD} = \frac{CE}{AD}$$

ou

$$AD.BC = BD.CE. \qquad (1)$$

Veja ainda que os triângulos, ABE e BCD são semelhantes, pois os ângulos $A\hat{B}E$ e $C\hat{B}D$ são congruentes e os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{D}C$ são congruentes, pois subtendem o mesmo arco. Dessa forma, temos

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD}$$

ou ainda,

$$AB.CD = BD.AE. \qquad (2)$$

Somando-se as igualdades (1) e (2) teremos

$$AD.BC + AB.CD = BD.CE + BD.AE$$

$$AD.BC + AB.CD = BD.(CE + AE).$$

Como $CE + AE = AC$, obtemos

$$AD.BC + AB.CD = BD.AC.$$

Usando esse teorema, Ptolomeu demonstra que dados os arcos α e β e suas respectivas cordas, pode-se achar a corda do arco diferença em função das cordas dos arcos dados. Com isso, ele deduz o que atualmente, usando as funções seno e cosseno representa a expressão $sen(a \pm b)$.

Sendo $crd\ \alpha$ a corda do arco α, e considerando o raio do círculo igual a 60, ele concluiu que os matemáticos gregos, que faziam cálculos com frações, usavam as frações babilônicas devido à facilidade que elas traziam para seus cálculos, daí a razão pela qual o raio do círculo era 60:

$$120crd(\alpha - \beta) = crd\alpha . crd(180 - \beta) - crd\beta . crd(180 - \alpha)$$

que nos lembra a expressão,

$$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha . cos\beta - sen\beta . cos\alpha.$$

Além disso, mostrou utilizando o teorema de Pitágoras que se α é um ângulo agudo então vale a relação.

$$cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1.$$

No que diz respeito à astronomia nos livros III, IV e V, ele desenvolve um sistema astronômico geocêntrico através de epiciclos, já nos livros VII e VIII, ocupa-se na apresentação de um catálogo de 1028 estrelas fixas e nos demais livros, trata dos planetas. De modo que as exposições astronômicas contidas no *Almagesto* foram utilizadas como padrão até os dias de Copérnico e Kepler.

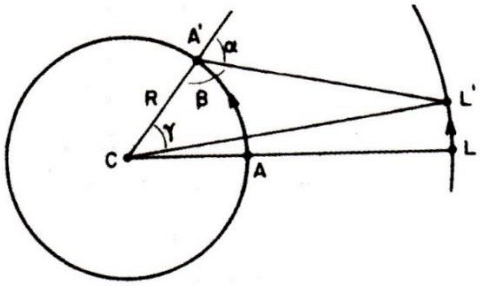
1.6.1 Contribuições de Ptolomeu

De acordo com Boyer e Eves, é comum lembrarmos de Ptolomeu hoje por causa de seu *Almagesto*, mas essa não foi a sua única obra. Dentre as mais importantes destaca-se *Geografia,* composta de 8 livros, que tem para os geógrafos a mesma importância que o *Almagesto* para os astrônomos. Nela ele descreve, dentre outras coisas, um sistema de latitudes e longitudes iguais aos que ainda são usados, catalogou aproximadamente 8000 cidades e outros aspectos importantes da Terra. Também escreveu sobre óptica e música. Tentou deduzir o postulado V (ou das paralelas) de Euclides, tendo em vista os outros postulados e axiomas dos *Elementos*, em uma tentativa fracassada de eliminá-lo das suposições iniciais desta obra.

1.6.2 Ptolomeu e o cálculo da distância da Terra à Lua

Segundo Ávila, o método proposto por Ptolomeu para calcular a distância da Terra à Lua é muito simples, porém engenhoso. Ele começou imaginando um observador num ponto A na Terra o qual vê a Lua sobre si verticalmente na posição L. Após um determinado tempo t, o observador, por causa do movimento de rotação da Terra, muda da posição A para a posição A'. Simultaneamente a Lua passa para a posição L'. Veja a figura 23

Figura 23 – Representação geométrica do método



Fonte: Explorando o Ensino de Matemática – Atividades vol. 2

Os ângulos $A\hat{C}A'$ e $A\hat{C}L'$ são conhecidos, uma vez que se conhecem os movimentos da Terra e da Lua, daí pode-se determinar γ, uma vez que $\gamma = A\hat{C}A' - A\hat{C}L'$. Pode-se medir diretamente o ângulo α e como o ângulo β é seu suplemento, este também fica determinado. Desse modo, o triângulo, $CA'L$ fica bem determinado, pelo lado $CA' = R$ e os ângulos β e γ. Assim, a distância CL' da Terra à Lua pode ser calculada em função de R.

2. FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo, é apresentada a fundamentação matemática necessária para a compreensão da trigonometria, de um ponto de vista matemático. Essa exposição foi trabalhada em sala de aula, pois era parte do currículo nesse nível de ensino.

O conteúdo que vai ser estudado agora é uma boa ferramenta que auxilia o cálculo de distâncias, as quais não podem ser medidas diretamente, quando se consegue estabelecer a semelhança entre dois triângulos.

2.1 Feixe de paralelas

Definição 2.1.1 *Dadas as retas r e s de um mesmo plano. Dizemos que elas são paralelas quando não possuem pontos em comum*.

Em símbolos, temos:

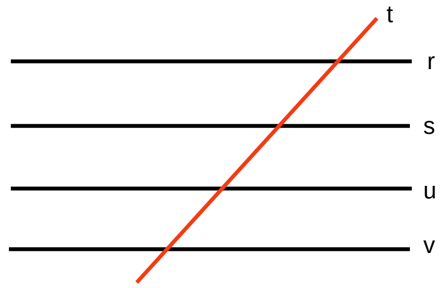
$$r\ //\ s \Leftrightarrow r \text{ e } s \text{ são coplanares e } r \cap s = \phi.$$

Definição 2.1.2 *Tomando-se em um mesmo plano três ou mais retas paralelas entre si, teremos um feixe de retas paralelas, ou tão somente feixe de paralelas*.

Definição 2.1.3 *Qualquer reta que intersecte as retas do feixe de paralelas é chamada de reta transversal.*

Observe o feixe de paralelas, com $r\ //\ s\ //\ u\ //\ v$, e a reta t, transversal. Conforme a figura 24 abaixo.

Figura 24 – Feixe de paralelas cortado por uma transversal



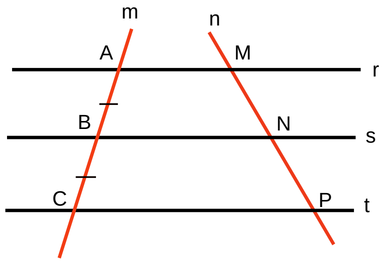
Fonte: Autor, 2014

Todo feixe de paralelas possui a seguinte propriedade: Se um feixe de retas paralelas determina segmentos congruentes sobre uma reta transversal, então determinará segmentos congruentes sobre qualquer outra reta transversal.

Demonstração:

Considere o feixe de retas paralelas dado por $r\,//\,s\,//\,t$ e as retas m e n transversais ao feixe. A reta m, intersecta o feixe nos pontos A, B e C respectivamente de modo que $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$. A reta n intersecta o feixe nos pontos M, N e P respectivamente. Devemos mostrar que $\overline{MN} \equiv \overline{NP}$. Veja a figura 25 abaixo.

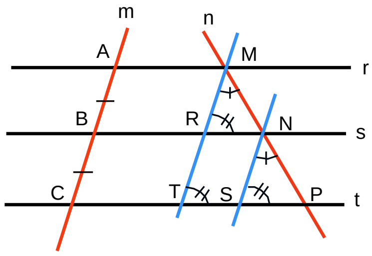
Figura 25 – Feixe de paralelas cortado pelas transversais *m* e *n*



Fonte: Autor, 2014

Tracemos pelos pontos M e N retas paralelas à reta m, de acordo com a figura 26.

Figura 26 – Retas $\overleftrightarrow{MT}$ e $\overleftrightarrow{NS}$ paralelas à reta *m*



Fonte: Autor, 2014

Da figura, temos por construção que:

(i) ABRM é um paralelogramo, daí temos que $\overline{AB} \equiv \overline{MR}$.

(ii) BCSN é um paralelogramo, daí temos que $\overline{BC} \equiv \overline{NS}$.

Como por hipótese, $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ tem-se então que $\overline{MR} \equiv \overline{NS}$. (1)

$\widehat{M} \equiv \widehat{N}$ ângulos correspondentes. (2)

$\widehat{R} \equiv \widehat{S}$ pois, $\widehat{R} \equiv \widehat{T}$ (ângulos correspondentes) e $\widehat{T} \equiv \widehat{S}$ (ângulos correspondentes). (3)

De (2), (1) e (3) conclui-se que $\Delta MRN \equiv \Delta NSP$ pelo caso de congruência ALA.

Portanto, temos que $\overline{MN} \equiv \overline{NP}$.

A demonstração acima pode ser estendida para um feixe com $n(n > 2)$ retas paralelas.

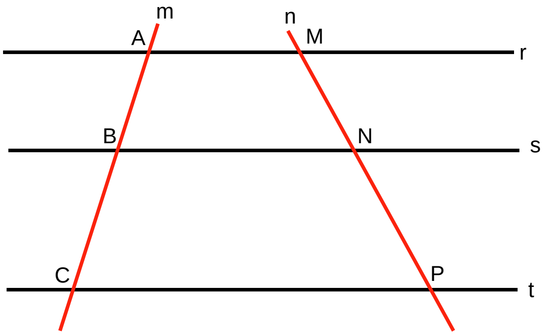
2.2 Teorema de Tales

Um feixe de retas paralelas determina, em duas retas transversais quaisquer, segmentos que são proporcionais.

Demonstração:

Considere o feixe de paralelas, $r\, //\, s\, //\, t$ que determina sobre a transversal m os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. E sobre a transversal n, os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$. Considere a figura 27 abaixo.

Figura 27 – Feixe de paralelas e segmentos proporcionais em retas transversais



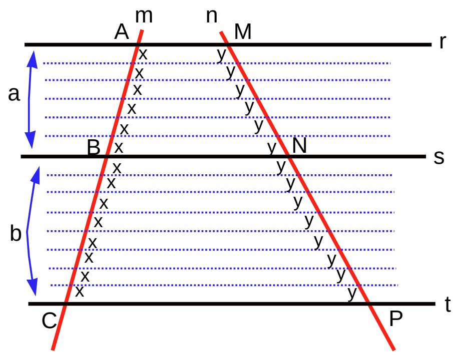
Fonte: Autor, 2014

Devemos mostrar que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}.$$

Tome um segmento de medida x, tal que $AB = ax$ e $BC = bx$, ou seja, existe um segmento x que é múltiplo de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Pelos pontos de divisão, traçamos retas paralelas às retas r, s e t. Pela propriedade anterior, os segmentos determinados sobre a transversal n, também são congruentes, chamaremos essas medidas de y de modo que $MN = ay$ e $NP = by$. Veja a figura 28.

Figura 28 – Transversais *m* e n divididas em segmentos congruentes



Fonte: Autor, 2014

Donde segue que,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{ax}{bx}=\dfrac{a}{b}\\ \dfrac{MN}{NP}=\dfrac{ay}{by}=\dfrac{a}{b}\end{array}\right\}\Longrightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{MN}{NP}$$

Portanto, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ são proporcionais.

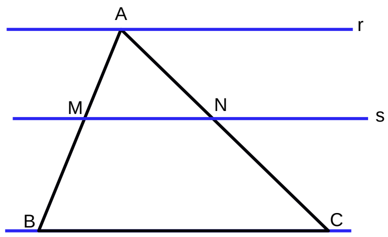
2.3 O teorema de Tales nos triângulos

Toda reta paralela a qualquer lado de um triângulo e que intersecta os outros dois lados em pontos distintos, determina, sobre eles, segmentos que são proporcionais.

Demonstração:

Considere o ΔABC, da figura 29 abaixo, traçando-se uma reta $s\,//\,\overline{BC}$, que intersecta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ nos pontos M e N repectivamente. Em seguida, traçamos pelo vértice A uma reta $r\,//\,s$. Obtendo assim, um feixe de paralelas $r\,//\,s\,//\,\overleftrightarrow{BC}$, cortado por duas transversais $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$.

Figura 29 – Triângulo ABC



Fonte: Autor, 2014

Pelo teorema de Tales, temos que:

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{CN}$$

Portanto, os segmentos $\overline{AM}$, $\overline{BM}$, $\overline{AN}$ e $\overline{CN}$ são proporcionais.

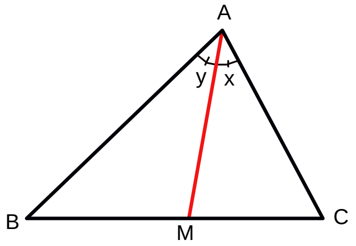
2.4 Teorema da bissetriz interna

A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto, em segmentos proporcionais aos lados adjacentes do ângulo considerado.

Demonstração:

Dado o triângulo ABC, traça-se a bissetriz $\overline{AM}$, do ângulo $\hat{A}$. Veja A figura 30 a seguir.

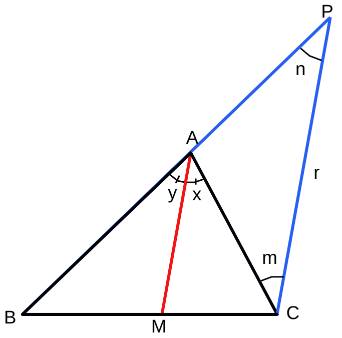
Figura 30 – Bissetriz interna $\overline{AM}$, do ângulo $\hat{A}$ no triângulo ABC



Fonte: Autor, 2014

Traçando-se pelo vértice C uma reta r paralela à bissetriz $\overline{AM}$, esta encontra o prolongamento do lado $\overline{AB}$ no ponto P, conforme mostrado na figura 31.

Figura 31 – Construção do triângulo PBC



Fonte: Autor, 2014

No triângulo PBC, temos que $\overline{AM} \,//\, r$ por construção. Do caso anterior temos que

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BM}{CM} \qquad (i)$$

Temos ainda que, $\begin{cases} m = x \ \ (\hat{a}ngulos\ alternos\ internos) \\ n = y \ \ (\hat{a}ngulos\ correspondentes) \\ x = y \ (\overline{AM}\ \text{é}\ bissetriz\ do\ \hat{a}ngluo\ \hat{A}) \end{cases}$

Desse modo, $m = n \Longrightarrow \Delta ABC$ é isósceles. Daí, segue que $\overline{AP} \equiv \overline{AC}$. Substituindo-se este resultado na igualdade (i) teremos, portanto que,

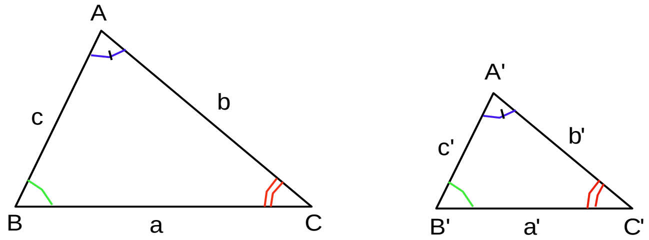
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CM}$$

2.5 Semelhança de triângulos

Definição 2.5.1 *Diz-se que dois triângulos são semelhantes, quando possuem os ângulos internos respectivamente congruentes, ou os lados homólogos proporcionais*.

Considere os triângulos, ABC e $A'B'C'$ da figura 32 abaixo.

Figura 32 – Triângulos semelhantes



Fonte: Autor, 2014

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Longrightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{cases} ou\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Lados homólogos (homo = mesmo e logos = lugar) são tais que, cada um deles está num dos triângulos e são opostos a ângulos congruentes. E a razão entre os lados homólogos, expressa por:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k.$$

Dessa forma, a constante k é denominada, razão de semelhança dos triângulos. No caso, em que $k = 1$, os triângulos são congruentes.

Decorrem da definição de triângulos semelhantes as seguintes propriedades:

i) Reflexiva: $\Delta ABC \sim \Delta ABC$

ii) Simétrica: $\Delta ABC \sim \Delta MNP \Leftrightarrow \Delta MNP \sim \Delta ABC$

iii) Transitiva: $\Delta ABC \sim \Delta MNP$ e $\Delta MNP \sim \Delta RST \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta RST$.

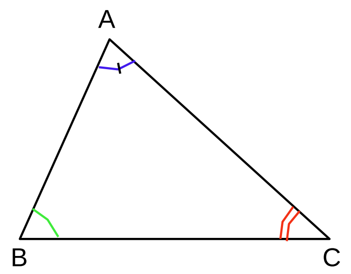
2.6 Teorema fundamental da semelhança de triângulos

Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intersecta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo determinado por ela é semelhante ao primeiro.

Demonstração:

Considere o ΔABC da figura 33 abaixo.

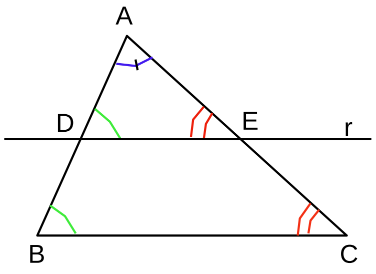
Figura 33 – Triângulo $\boldsymbol{ABC}$ qualquer



Fonte: Autor, 2014

Tracemos uma reta r, paralela ao lado $\overline{BC}$, que intersecta o lado $\overline{AB}$ e o lado $\overline{AC}$, respectivamente nos pontos D e E. Veja a figura 34 abaixo.

Figura 34 – Reta *r* paralela ao lado $\overline{\boldsymbol{BC}}$ do triângulo $\boldsymbol{ABC}$



Fonte: Autor, 2014

i) Ângulos congruentes

Como $r\ //\ \overline{BC}$, tem-se que: $\begin{cases} \hat{B} \equiv \hat{D}\ (\hat{a}ngulos\ correspondentes) \\ \hat{C} \equiv \hat{E}\ (\hat{a}ngulos\ correspondentes) \\ \hat{A} \equiv \hat{A}\ (\hat{a}ngulo\ comum) \end{cases}$

ii) Lados homólogos são proporcionais

Devemos mostrar que,

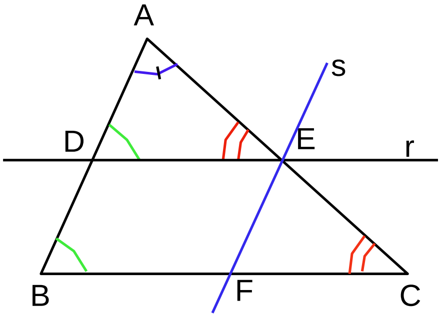
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Do teorema de Tales, segue que,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Tracemos por E, a reta s paralela ao lado $\overline{AB}$, que intersecta $\overline{BC}$ no ponto F. Veja a figura 35 abaixo.

Figura 35 – Reta *s* paralela ao lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC



Fonte: Autor, 2014

No paralelogramo $BDEF$, temos $\overline{DE} \equiv \overline{BF}$ e pelo teorema de Tales, segue que,

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC} \Longrightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

daí, segue-se que

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Portanto, de (i) e (ii) temos que

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE.$$

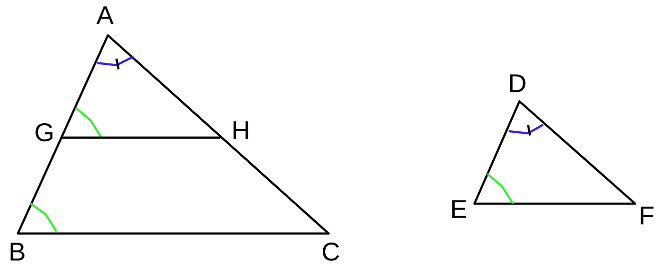
2.7 Casos de semelhança

1º caso: Se dois triângulos ABC e DEF são tais que $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\hat{B} \equiv \hat{E}$, então eles são semelhantes.

Demonstração:

Considerando que os triângulos ABC e DEF da figura 36 não são congruentes temos que $\overline{AB} > \overline{DE}$. Seja G um ponto de $\overline{AB}$ tal que $\overline{AG} \equiv \overline{DE}$ e o triângulo AGH com $\hat{G} \equiv \hat{E}$ e H no lado $\overline{AC}$.

Figura 36 – Triângulos ABC e DEF com $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$



Fonte: Autor, 2014

Daí, tem-se que:

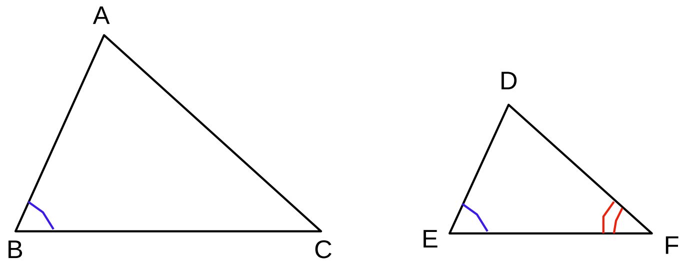
$$\left.\begin{array}{l}(\hat{A} \equiv \hat{D}, \quad \overline{AG} \equiv \overline{DE}, \quad \hat{G} \equiv \hat{E}) \overset{ALA}{\Longrightarrow} \Delta AGH \equiv \Delta DEF \\ (\hat{B} \equiv \hat{E} \text{ e } \hat{E} \equiv \hat{G}) \Longrightarrow \hat{B} \equiv \hat{G} \Longrightarrow \overleftrightarrow{GH} \,//\, \overleftrightarrow{BC} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta AGH\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

2º caso: Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro e os ângulos compreendidos entre eles são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Demonstração:

Considere os triângulos, ABC e DEF da figura 37 abaixo.

Figura 37 – Triângulos ABC e DEF com $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$



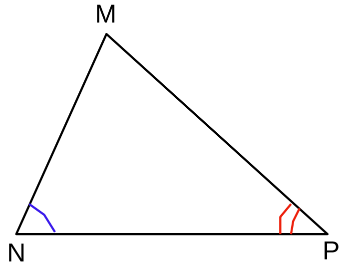
Fonte: Autor, 2014

Temos, por hipótese, que

$$\hat{B} \equiv \hat{E} \ e \ \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$$

Seja MNP por construção, um triângulo tal que, $\overline{NP} \equiv \overline{BC}$, $\widehat{N} \equiv \hat{E}$ e $\hat{P} \equiv \hat{F}$. Veja figura 38.

Figura 38 – Triângulo MNP



Fonte: Autor, 2014

Logo, pelo 1º caso de semelhança, temos que $\Delta MNP \sim \Delta DEF$. Desse modo, os lados homólogos são proporcionais $\frac{DE}{MN} = \frac{EF}{NP}$, como $\overline{NP} \equiv \overline{BC}$ então $\frac{DE}{MN} = \frac{EF}{BC}$ mas, por hipótese sabemos que, $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$, daí segue que $\overline{MN} \equiv \overline{AB}$.

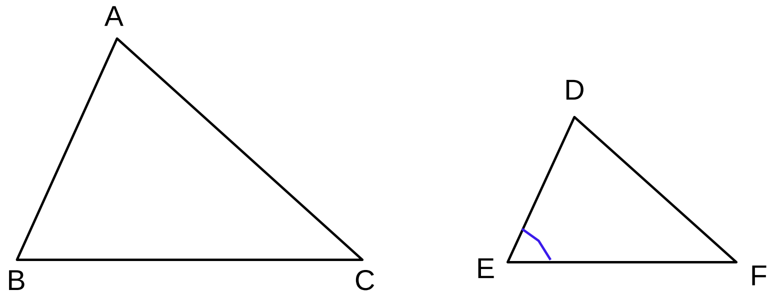
Logo, temos que, $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, pois $\overline{AB} \equiv \overline{MN}$, $\hat{B} \equiv \hat{N}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{NP} - \ caso\ LAL$. Portanto, temos que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

3º caso: Se dois triângulos possuem os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.

Demonstração:

Considere os triângulos, ABC e DEF da figura 39.

Figura – 39 Triângulos ABC e DEF com lados homólogos proporcionais



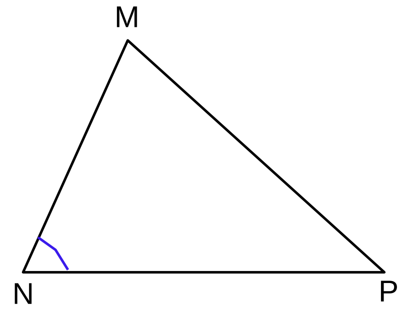
Fonte: Autor, 2014

Temos, por hipótese, que:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$$

Seja MNP por construção, um triângulo tal que, $\hat{N} \equiv \hat{E}$, $\overline{NP} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{MN} \equiv \overline{AB}$. Ver figura 40.

Figura 40 – Triângulo MNP com $\hat{N} \equiv \hat{E}$, $\overline{NP} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{MN} \equiv \overline{AB}$



Fonte: Autor, 2014

Por hipótese, temos que $\frac{DE}{MN} = \frac{EF}{NP}$ e $\hat{N} \equiv \hat{E}$. Pelo 2º caso de semelhança temos que $\Delta MNP \sim \Delta DEF$. Segue daí, que os lados homólogos são proporcionais $\frac{DE}{MN} = \frac{DF}{MP}$ e como $\overline{MN} \equiv \overline{AB}$, então $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{MP}$. Mas, pela hipótese sabemos que $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$, logo temos que $\overline{MP} \equiv \overline{AC}$.

Assim temos que $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, pois, $\overline{AB} \equiv \overline{MN}$, $\overline{NP} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{MP} - caso\ LLL$.

Portanto, concluímos que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

2.8 A trigonometria no triângulo retângulo

Conforme Guelli, Hiparco construiu a primeira tabela trigonométrica com os valores das cordas de vários ângulos entre 0° e 180°, esse feito deu um grande avanço para a astronomia e o título de pai da trigonometria para Hiparco. Porém, diante do surgimento da obra mais importante da antiguidade sobre trigonometria, um conjunto de 13 livros chamado o *Almagesto* escrita por Ptolomeu, o título de Hiparco seria esquecido.

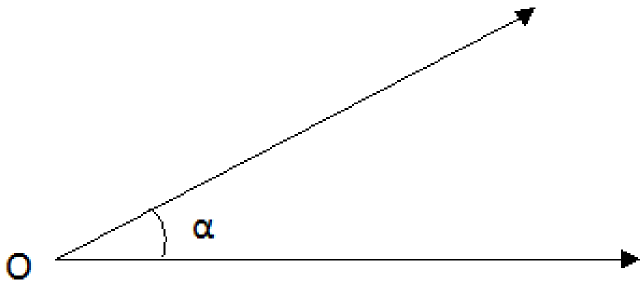
No *Almagesto,* Ptolomeu escreve uma tabela trigonométrica bem mais completa. Nela, Ptolomeu fornece as medidas das cordas para os ângulos de 0° a 180° variando de meio em meio grau.

A trigonometria é uma poderosa ferramenta para o cálculo de grandes distâncias, basta enxergar em um triângulo retângulo, a medida ou parte da medida de um de seus lados e ter um instrumento para medir ângulos.

2.9 Razões trigonométricas de um ângulo agudo

Considere inicialmente um ângulo agudo α, com vértice no ponto O, como mostra a figura 41 abaixo.

Figura 41 – Ângulo agudo α

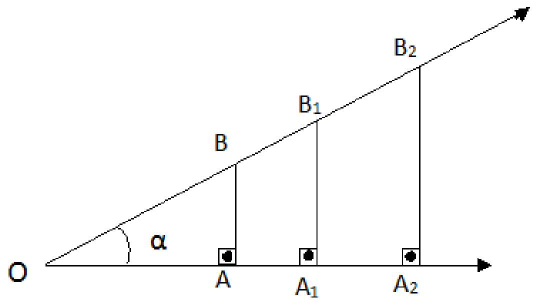


Fonte: Autor, 2014

Tomando-se sobre um dos lados do ângulo α, pontos distintos arbitrários A, A_1, A_2, ... e traçando-se por esses pontos, perpendiculares ao lado $\overrightarrow{OA}$ do ângulo, essas vão intersectar o outro nos pontos B, B_1, B_2, ..., respectivamente.

Determinando os triângulos retângulos OAB, OA_1B_1, OA_2B_2,... conforme figura 42 abaixo,

Figura 42 – Triângulos retângulos



Fonte: Autor, 2014

que são semelhantes, de acordo com o 1º caso de semelhança de triângulos. Desse modo, podemos escrever as seguintes proporções:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \cdots = k_1$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} = \cdots = k_2$$

$$\frac{AB}{OA} = \frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \cdots = k_3.$$

Os números k_1, k_2 e k_3, são chamados respectivamente de seno, cosseno e tangente do ângulo agudo α e indicamos por:

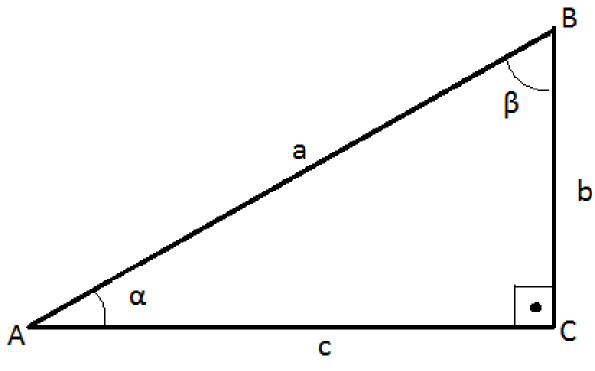
$$sen\ \alpha = \frac{AB}{OB}, \quad cos\alpha = \frac{OA}{OB} \quad e \quad tg\alpha = \frac{AB}{OA}.$$

São denominados também de razões trigonométricas do ângulo agudo α.

2.10 As razões trigonométricas no triângulo retângulo

No triângulo retângulo ABC, reto em C, da figura 43 a seguir,

Figura 43 – Triângulo retângulo ABC



Fonte: Autor, 2014

temos os seguintes elementos:

$\overline{AB}$ é a hipotenusa e sua medida é indicada por a.

$\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são catetos e suas medidas são respectivamente, indicadas por b e c.

$\overline{BC}$ é o cateto oposto ao ângulo α e $\overline{BC}$ é o cateto adjacente ao ângulo β.

$\overline{AC}$ é o cateto adjacente ao ângulo α e $\overline{AC}$ é o cateto oposto ao ângulo β.

De acordo com o que foi visto no item anterior:

Para o ângulo α, temos que,

$$sen\ \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$cos\ \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$tg\ \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \alpha}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \alpha} = \frac{b}{c}.$$

E para o ângulo β, tem-se,

$$sen\ \beta = \frac{AC}{AB} = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \beta}{medida\ da\ hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$cos\ \beta = \frac{BC}{AB} = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \beta}{medida\ da\ hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$tg\ \beta = \frac{AC}{BC} = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \beta}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \beta} = \frac{c}{b}.$$

2.11 A origem dos nomes seno, cosseno e tangente

De acordo com Guelli, no começo do século VII E.C., os Árabes expandiram-se por toda península Ibérica formando reinos que duram por séculos, de tal maneira que, nenhum europeu podia pensar em ser matemático ou astrônomo, sem dominar o idioma árabe. No início do século XII E.C, a matemática árabe havia atingido amplo desenvolvimento, de modo que o resto do mundo não podia ignorar.

Foram feitas muitas traduções do árabe para o latim, que favoreceram o desenvolvimento da matemática na Europa. Um desses tradutores e também matemático, foi o inglês Robert de Chester. Como os árabes haviam traduzido muitos textos do sânscrito, quando encontram a palavra jiva *meia corda* eles a escreveram como *jiba*. Mas, é comum na língua árabe, escrever somente as consoantes deixando a cargo do leitor a colocação das vogais. Dessa forma, os árabes escreveram *jb.* Na tradução para o latim Robert de Chester escreveu *jaib* que significa baía ou enseada e escreve-se *sinus.*

Por sua vez, a palavra *cosseno,* surgiu no século XVII, representando o seno do complemento de um ângulo; já a *tangente*, surge da necessidade de calcular distâncias e alturas e foi usada pela primeira vez, pelo matemático dinamarquês Thomas Fincke, em 1583.

3. ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Neste capítulo, será descrita uma sequência de atividades didáticas, destinadas ao ensino de trigonometria no ensino fundamental. Essa sequência didática encontra-se organizada de acordo com as recomendações sugeridas no Banco Indutor de Trabalhos (BIT), que foram elaboradas por Claudina Rodrigues (UNICAMP), Sueli Costa (UNICAMP) e Victor Giraldo (UFRJ) e referem-se às orientações a respeito do trabalho de conclusão de curso do PROFMAT. Recomenda-se ao mestrando, preferencialmente, que desenvolva um projeto com aplicação direta na sala de aula de Matemática na educação básica, contribuindo, dessa forma, para o enriquecimento do ensino da disciplina. O projeto deverá estar de acordo com uma das seguintes sugestões de modalidade:

1- Elaboração de proposta de atividades educacionais;
2- Aplicação de atividades em sala de aula e avaliação de resultados;

Desse modo, desenvolvemos a proposta, baseando-nos na 2ª modalidade, na qual pretendemos trabalhar com a história da trigonometria como um recurso didático.

Esse trabalho foi realizado no Colégio Municipal Judith Paiva, situado à Avenida Alberto Santos Dumont, S/N, Centro, Rio Largo – AL. Participaram do trabalho os alunos das turmas: 9º ano A com 42 alunos e 9º ano B, também com 42 alunos do período matutino, durante o mês de novembro do ano letivo de 2013.

Sendo grande o número de alunos por turma, ficaria inviável trabalhar identificando-os pelos seus respectivos nomes. Com a finalidade de facilitar o entendimento do trabalho, cada aluno será identificado com um código da seguinte maneira: os alunos do 9º ano A, com os códigos de A_{01} até A_{42} e os alunos do 9º ano B, de B_{01} até B_{42}.

Dificuldades previstas

Como o conteúdo é geometria, é bem provável que muitos desses alunos nunca tenham visto nada de geometria, pois é costume de alguns professores passarem esse tema sempre para o final e acabam não trabalhando esse tópico.

Objetivos Gerais

- Trabalhar a história da trigonometria que não é abordado no ensino fundamental;
- Mostrar a importância sociocultural da matemática;
- Trazer a matemática para o cotidiano do aluno, mostrando sua presença em algumas situações de maneira clara e objetiva;
- Aplicar a trigonometria no cálculo de grandes distâncias.

Material Utilizado

Notebook, Caixa de som amplificada, Microfone, *Data show*, Tela de projeção, tripé, lápis, caneta, trenas de 10 e 30 metros, esquadro, régua, transferidor e teodolito.

3.1 Atividade 1: Apresentação dos temas

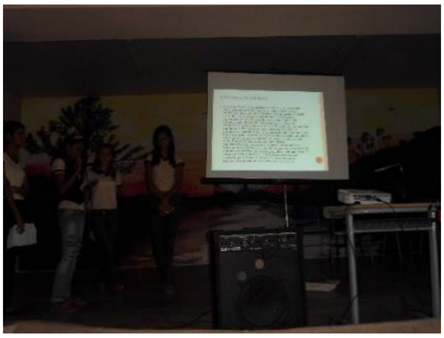
Objetivo: Desenvolver a oralidade dos alunos, propiciar o trabalho em grupo e promover o sentimento de comunidade intelectual entre os educandos e entre estes e o professor; capacitá-los na coleta de material para análise e interpretação, colocando a objetividade acima da subjetividade. Além disso, propiciar a aprendizagem da sistematização de fatos observados e a reflexão sobre eles.

Metodologia: Inicialmente, em cada turma, os alunos foram agrupados em 6 equipes de 7 alunos. No 9º ano A, as equipes foram denominadas de EA1 até EA6 e no 9º ano B, de EB1 até EB6. Em seguida, cada equipe escolheu um, dentre os seguintes temas: Tales de Mileto, Pitágoras, Aristarco, Eratóstenes, Hiparco e Ptolomeu, realizaram uma pesquisa orientados por mim. Logo após, cada equipe preparou uma apresentação em *power point* que foi realizada no auditório da escola, usando notebook e data show, ambos fornecidos pela escola. A equipe EA3, em sua apresentação, colocou um vídeo que se chama "História da Astronomia [Aristarco de Samos]", com duração de 2 minutos e 43 segundos, enquanto a equipe EB2, passou trechos do vídeo "O Legado de Pitágoras" que tem duração total de 40 minutos e 30 segundos. Ambos os vídeos podem ser encontrados na internet no *site* da TV escola e *youtube* respectivamente. Foram utilizadas 4 horas/aula, sendo cada aula de 60 minutos. Foi estipulado um tempo de 30 minutos para cada uma das equipes. Veja as seguintes figuras 44, 45 e 46 a seguir,

Figura 44 – Equipe EB1 falando sobre Tales de Mileto

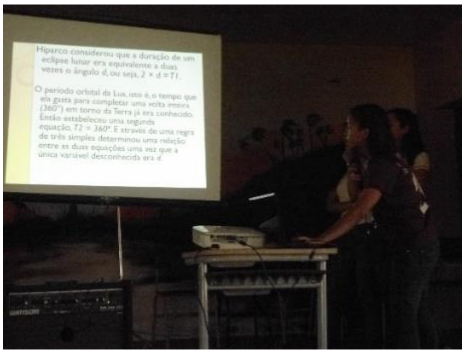
Fonte: Autor, 2013

Figura 45 – Equipe EA2 falando sobre Pitágoras



Fonte: Autor, 2013

Figura 46 – Equipe EB5 falando sobre Hiparco



Fonte: Autor, 2013

Após cada apresentação, iniciava-se uma discussão de 10 minutos entre os alunos ouvintes e os membros das equipes, a fim de verificar o que eles tinham compreendido do que fora exposto.

Seguem alguns comentários do que acharam das apresentações, do que entenderam e do que mais os impressionou:

3.1.1 Comentários dos alunos a respeito das apresentações

Aluno B_{05}:

"Gostei muito, queria que as aulas de matemática fossem sempre desse jeito. Parece até aula de história."

Aluno B_{22}:

"Eu fiquei surpreendido em ver que a matemática é tão antiga, e que teve tanta gente para inventá-la."

Aluno A_{18}:

"O que me chamou atenção, foi saber que o teorema de Pitágoras, já era conhecido pelos babilônios uns 3000 anos antes de Pitágoras."

Aluno A_{25}:

"Achei muito interessante como Tales fez para calcular a altura da pirâmide naquela época que as pessoas não sabiam tanto matemática."

Aluno B_{34}:

"Eu gostei muito das apresentações, aprendi até que Pitágoras foi aluno de Tales e que, Pitágoras usava matemática até na música."

Aluno A_{08}:

"Eu gostei de saber como aqueles homens usavam o Sol, a sombra, a Terra e a Lua para calcular distâncias que não podia medir."

Aluno B_{36}:

"O que achei interessante, foi saber que tem tanta demonstração do teorema de Pitágoras, quase 400."

Aluno A_{12}:

"O que eu achei interessante, foi que, naquela época, eles pensavam que eram o Sol e os outros planetas que giravam em torno da Terra."

Aluno B_{14}:

“Gostei bastante, e o que mais impressionou foi que eles sabiam matemática, astronomia, geografia, música, história e ainda inventava as coisas.”

Aluno A_{04}:

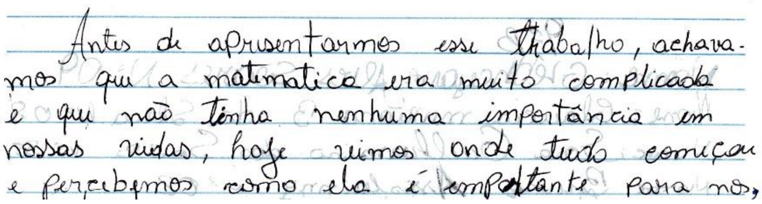
“Eu gostei de ver como Aristarco descobriu só observando os eclipses que a Terra não era o centro do universo, e sim, o Sol.”

Apesar de ter sido criado um clima de descontração diante das apresentações, ainda houve muita recusa por parte dos alunos em expor seus comentários. Por isso, pedi-lhes que escrevessem o que acharam. Seguem alguns relatos:

3.1.2 Relatos dos alunos a respeito das apresentações

“Antes de apresentarmos esse trabalho, achávamos que a matemática era muito complicada e que não tinha nenhuma importância em nossas vidas. Hoje vimos onde tudo começou e percebemos como ela é importante para nos (*sic)*.” (Ver figura 47.)

Figura 47 – Relato do aluno A_{06}

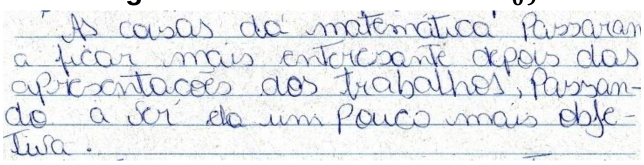


Antes de apresentarmos esse trabalho, achava-
mos que a matematica era muito complicada
e que não tinha nenhuma importância em
nossas vidas, hoje vimos onde tudo começou
e percebemos como ela é importante para nós,

Fonte: Autor, 2013

“As coisas da matemática passaran (*sic*) a ficar mais enteresante (*sic*) depois das apresentações dos trabalhos, passando a ver ela um pouco mais objetiva.” Figura 48.

Figura 48 – Relato do aluno B_{09}



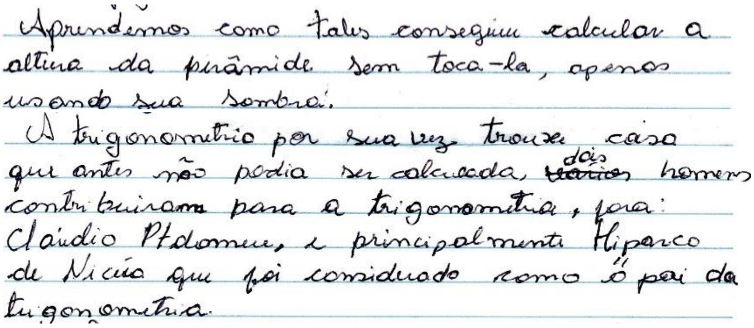
"As coisas da matemática passaram
a ficar mais entcresante depois das
apresentações dos trabalhos, passan-
do a ser ela um pouco mais obje-
tiva.

Fonte: Autor, 2013

“Aprendemos como Tales conseguiu calcular a altura da pirâmide sem toca-la (*sic*), apenas usando sua sombra.

A trigonometria por sua por sua vez trouxe coisa que antes não podia ser calculada, dois homens contribuíram para a trigonometria, fora (*sic*): Cláudio Ptolomeu, e principalmente Hiparco de Nicéia que foi considerado como o pai da trigonometria." Ver figura 49 a seguir:

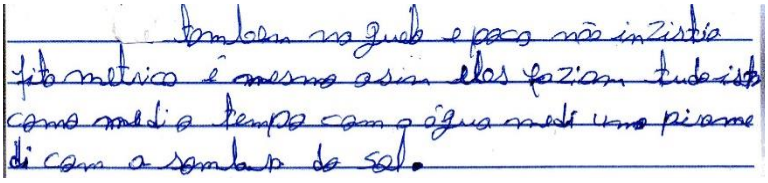
Figura 49 – Relato do aluno B_{17}


Aprendemos como Tales conseguiu calcular a
altura da pirâmide sem toca-la, apenos
usando sua sombra.
A trigonometria por sua vez trouxe caso
que antes não podia ser calculada, ~~vários~~ dois homens
contribuiram para a trigonometria, fora:
Cláudio Ptolomeu, e principalmente Hiparco
de Nicéia que foi considerado como o pai da
trigonometria.

Fonte: Autor, 2013

"também naquele (*sic*) epoca (*sic*) não insistia (*sic*) fita métrica é (*sic)* mesmo assim (*sic*) eles faziam tudo isto como media o tempo com a água medi (*sic*) uma piramedi (*sic*) com a sombra do sol." De acordo com a figura 50.

Figura 50 – Relato do aluno A_{15}


também naquele epoca não inZistia
fita metrica é mesmo asim eles faziam tudo isto
como media tempo com o água medi uma pirame
di com a sombra do sol.

Fonte: Autor, 2013

Percebe-se, nesses comentários e relatos, o entusiasmo em relação às exposições dos temas, a referência a outras disciplinas, a surpresa na descoberta de que a matemática é uma ciência tão antiga e criada por muitas culturas, a diversidade do conhecimento de cada um daqueles estudiosos, os métodos e elementos que utilizavam para calcular grandes distâncias, impossíveis de serem obtidas por meio de medições, a utilização da matemática em outros ramos do conhecimento como na música, na geografia e astronomia.

3.2 Atividade 2: Calculando distâncias segundo o método de Tales

Objetivo: Facilitar o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo abordado, através da experimentação, aliando a teoria à prática, possibilitando o desenvolvimento da pesquisa e da problematização em sala de aula, despertando a curiosidade e o interesse do aluno. Por outro lado, transformar o estudante em sujeito da aprendizagem, possibilitando que o mesmo desenvolva habilidades e competências específicas.

Metodologia: Os alunos de cada uma das turmas foram reorganizados em equipes de acordo com aquelas das apresentações, e conduzidos para o lado externo da escola, onde, utilizando trena, uma cadeira, lápis, borracha, régua e/ou esquadro, caneta e caderno, foram desafiados a resolver alguns problemas, utilizando sombras. Nesse momento, uma equipe por vez efetuava a medida da sombra da cadeira e a medida da sombra do objeto que se desejava saber a altura, enquanto outro membro da equipe desenhava e colocava as medidas dos lados dos triângulos formados pelo objeto e sua sombra. Em seguida, reuniam-se todos os membros da equipe e efetuavam os cálculos, obtendo a medida desejada.

O processo é repetido com todas as equipes e os resultados são comparados, verificando-se que são muito próximos uns dos outros. Nessa atividade, foram utilizadas duas aulas com duração de 60 minutos cada uma, para cada turma.

3.2.1 A atividade desenvolvida pela equipe EB3

Cálculo da altura da fachada da escola, usando o método de Tales. (Ver figura 51.)

Figura 51 – Fachada da escola

Fonte: Autor, 2013

A princípio, os alunos, usando uma trena de 10 metros, mediram a sombra da fachada, encontrando para esta, 6,43 metros. (Veja figura 52.)

Figura 52 – Alunos medindo sombra da fachada

Fonte: Autor, 2013

Em seguida e rapidamente, mediram e tomaram nota do comprimento da sombra e da medida da altura de uma cadeira, encontrando 0,48 m e 0,8 m respectivamente. (Conforme as figuras, 53 e 54.)

Figura 53 – Alunos medindo a altura da cadeira

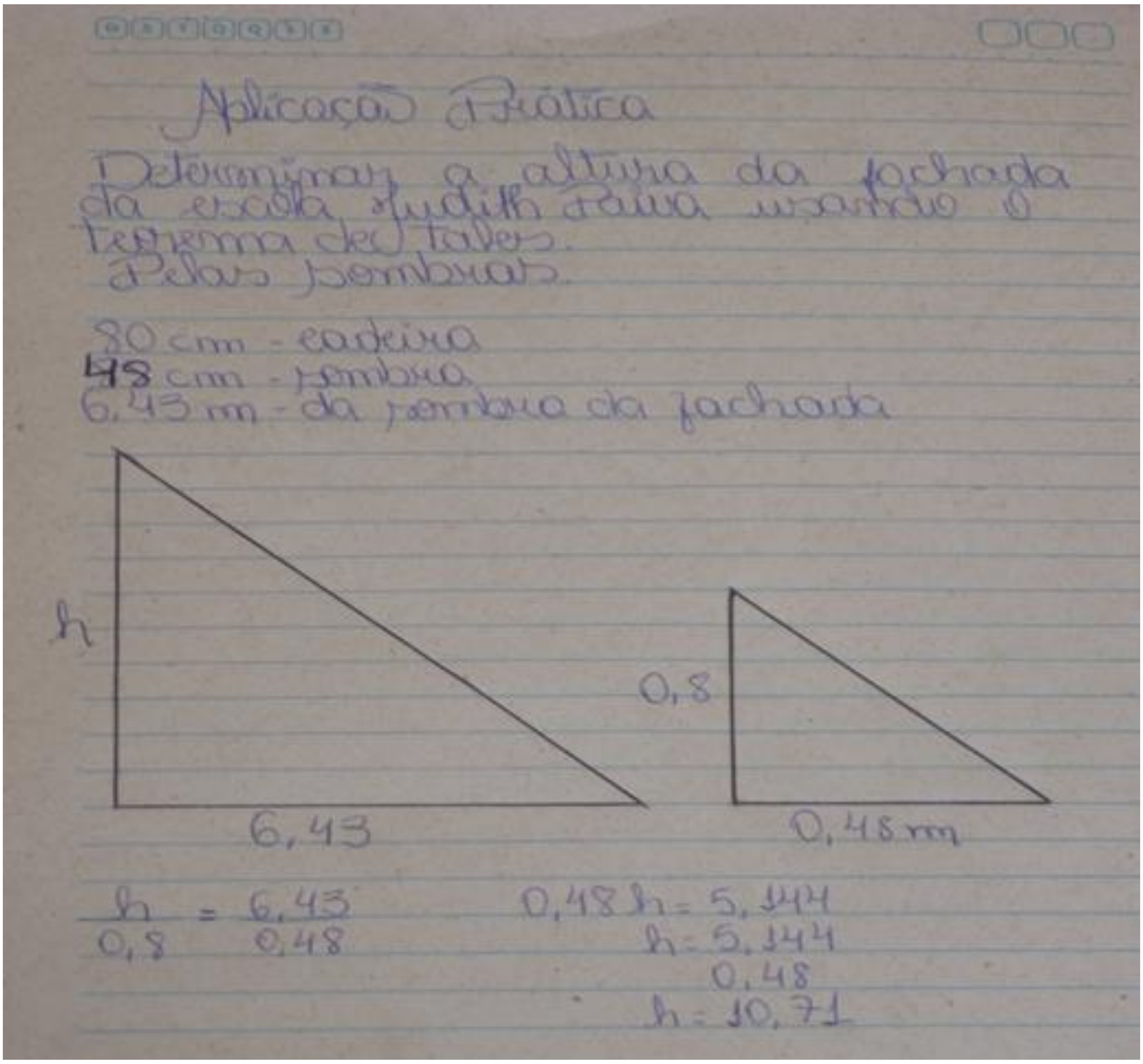
Fonte: Autor, 2013

Figura 54 – Alunos medindo o comprimento da sombra da cadeira

Fonte: Autor, 2013

Finalmente, após terem todos os dados anotados, reuniram-se, desenharam os triângulos semelhantes que ilustravam a situação e efetuaram os respectivos cálculos, obtendo o que está mostrado na figura 55 abaixo:

Figura 55 – Atividade realizada pela equipe EB3

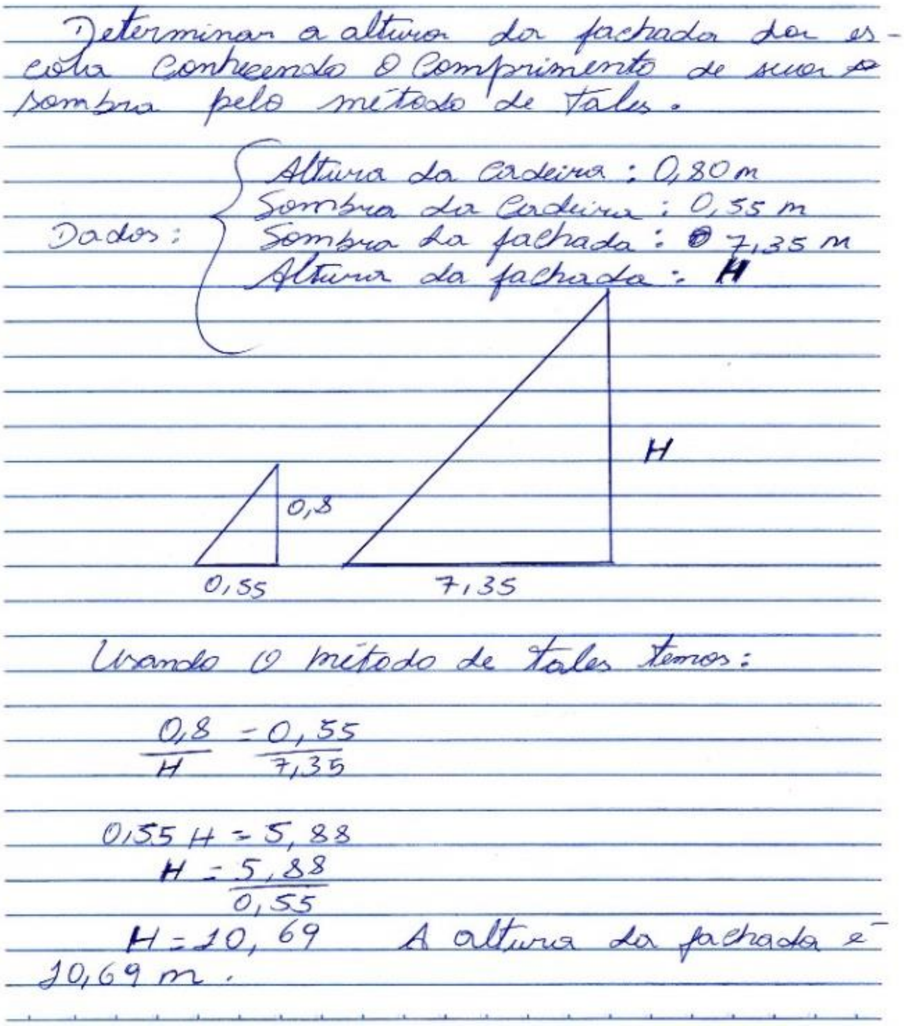


Fonte: Autor, 2013

3.2.2 A atividade desenvolvida pela equipe EA4

Usando os mesmos procedimentos descritos e ilustrados acima, a equipe EA4 encontrou o seguinte resultado para a mesma atividade. (Ver figura 56.)

Figura 56 – Atividade realizada pela equipe EA4


Determinar a altura da fachada da escola conhecendo o comprimento de sua sombra pelo método de Tales.

Dados:
Altura da cadeira: 0,80 m
Sombra da cadeira: 0,55 m
Sombra da fachada: 7,35 m
Altura da fachada: H

Usando o método de Tales temos:

$$\frac{0,8}{H} = \frac{0,55}{7,35}$$

$$0,55\,H = 5,88$$

$$H = \frac{5,88}{0,55}$$

$H = 10,69$ A altura da fachada é 10,69 m.

Fonte: Autor, 2013

Ao fim da atividade, foi solicitado que relatassem oralmente ou por escrito suas opiniões ou comentários sobre a aula, destacando algo que os tivesse chamado atenção. Seguem alguns dos comentários:

3.2.3 Comentários e relatos dos alunos sobre a atividade 2

Aluno A_{17}:

“Adorei a aula de hoje porque vi como usa matemática na prática.”

Aluno B_{15}:

“Nem posso acreditar que estou gostando de matemática achei muito boa a aula de hoje pensei que nunca ia aprender nada.”

AlunoB_{01}:

"Eu só achei complicado fazer as contas com aqueles números com vírgula, mas a aula foi muito interessante."

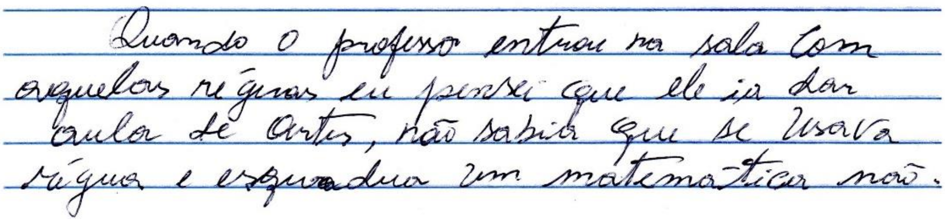
AlunoA_{07}:

"Eu tive dificuldades para pra colocar aquelas medidas de centímetros para metros. E depois pra calcular o resultado."

Aluno A_{20}:

"Quando o professor entrou na sala com aquelas réguas eu pensei que ele ia dar aula de artes, não sabia que se usava régua e esquadra (*sic)* em matemática não." (Ver figura 57.)

Figura 57 – Relato do aluno A_{20}

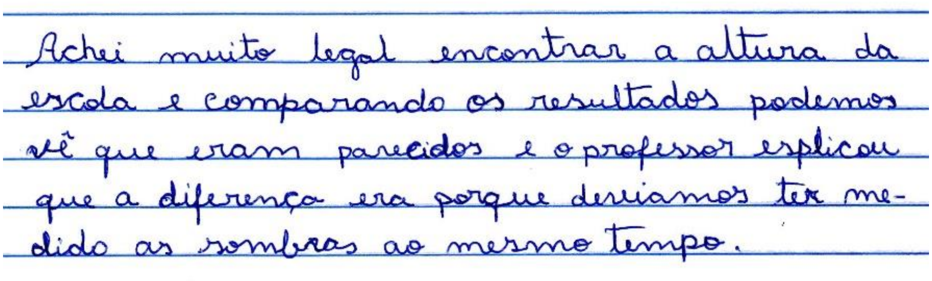

Quando o professor entrou na sala Com
aquelas réguas eu pensei que ele ia dar
aula de Artes, não sabia que se Usava
régua e esquadra um matemática não.

Fonte: Autor, 2013

Aluno B_{12}:

"Achei muito legal encontrar a altura da escola e comparando os resultados podemos vê que eram parecidos e o professor esplicou (*sic)* que a diferença era porque deviamos (*sic)* ter medido as sombras ao mesmo tempo." Ver figura 58 abaixo.

Figura 58 – Relato do aluno B_{12}


Achei muito legal encontrar a altura da
escola e comparando os resultados podemos
vê que eram parecidos e o professor esplicou
que a diferença era porque deviamos ter me-
dido as sombras ao mesmo tempo.

Fonte: Autor, 2013

Observa-se nesses comentários e relatos, o entusiasmo dos alunos com a aula prática, a surpresa em ver que se está compreendendo a matéria e a comparação com outros componentes escolares, mostrando nesse caso que, para alguns alunos a geometria não é algo que faz parte da matemática. Nota-se também as dificuldades encontradas por alguns deles de não ter compreendido bem as operações com números decimais e não conseguir fazer transformações de uma unidade de medida para outra.

3.3 Atividade 3: Calculando distâncias usando razões trigonométricas

Objetivo: Facilitar o processo de ensino-aprendizagem da trigonometria através da utilização do instrumento conhecido como teodolito, relacionando teoria e prática, motivando desse modo, o desenvolvimento da pesquisa e da problematização em sala de aula, despertando a curiosidade e o interesse do aluno. Por outro lado, transformar o estudante em sujeito da aprendizagem, possibilitando que o mesmo desenvolva habilidades e competências específicas.

Metodologia: Os alunos de cada uma das turmas foram novamente reorganizados em equipes de acordo com aquelas das apresentações e conduzidos para o lado externo da escola, utilizando trena, uma mesa, um *teodolito* que foi confeccionado por mim com ajuda dos alunos para ser usado nas aulas práticas de trigonometria, lápis, borracha, régua e/ou esquadro, caneta, caderno e uma tabela de razões trigonométricas, que dá os valores do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos de 0° a 90°. Foi ensinado a cada aluno como utilizar o teodolito em seguida eles foram desafiados a resolver os problemas da atividade anterior, utilizando razões trigonométricas. Nesse momento, uma equipe de cada vez, mede, da base do objeto que se deseja saber a altura, uma distância qualquer, posicionando-se a mesa e em cima desta, coloca-se o teodolito mirando-o na parte superior do objeto a ser medido em seguida, observa-se o ângulo indicado, um outro membro da equipe toma nota e desenha um triângulo retângulo colocando-se as medidas obtidas.

Dando sequência, reúnem-se todos os membros da equipe e efetuam os cálculos obtendo a medida desejada. O processo é repetido com todas as equipes, os resultados são comparados, todos perceberam que os resultados são muito próximos uns dos outros. Nessa atividade, foram utilizadas 2 horas/aula em cada turma, sendo cada aula de 60 minutos. Vejamos duas dessas atividades

3.3.1 Atividade desenvolvida pela equipe EB5

Cálculo da altura da fachada da escola utilizando o teodolito. (Veja a figura 59)

Figura 59 – Vista frontal da fachada da escola

Fonte: Autor, 2013

Inicialmente, os alunos posicionaram a mesa juntamente com o teodolito e mediram a distância da base da pilastra da fachada até a mesa. (Conforme figuras 60 e 61).

Figura 60 – Alunos posicionando a mesa e teodolito

Fonte: Autor, 2013

Figura 61 – Alunos medindo a distância entre a mesa e pilastra

Fonte: Autor, 2013

Em seguida, foram ajudados para medirem a distância do centro do teodolito posicionado em cima da mesa até o chão (veja a figura 62.)

Figura 62 – Alunos medindo distância do teodolito ao chão

Fonte: Autor, 2013

Logo após, mediu-se o ângulo sob o qual o topo da fachada era visto, conforme mostrado na figura 63 a seguir.

Figura 63 – Aluna medindo o ângulo

Fonte: Autor, 2013

Com a medida do ângulo em mãos, os alunos consultaram no livro didático uma tabela trigonométrica e tomaram nota dos valores do seno, cosseno e tangente do ângulo. (Conforme a figura 64.

Figura 64 – Consultando tabela trigonométrica

Fonte: Autor, 2013

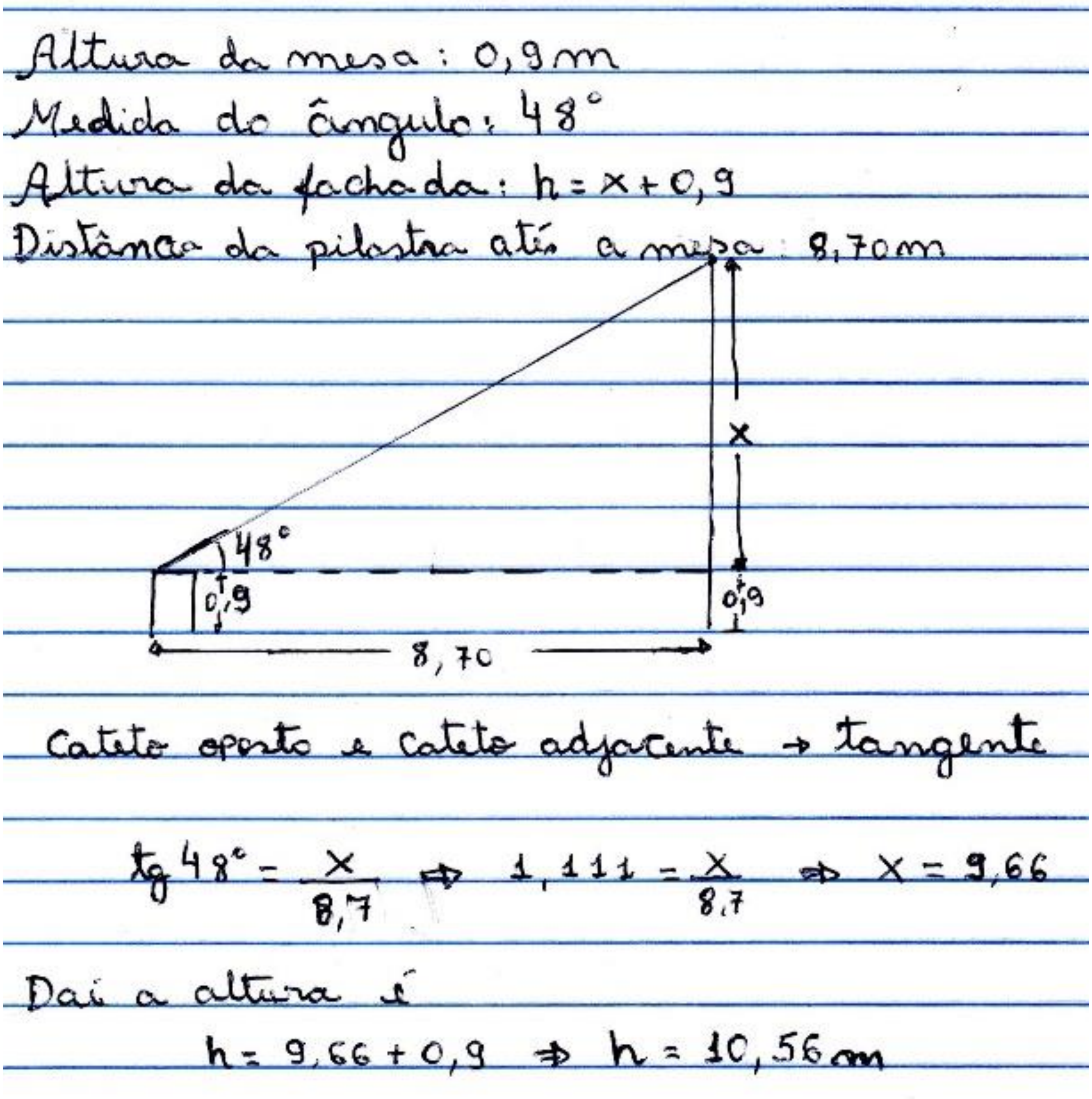
Finalmente, reuniram-se para fazer uma representação geométrica da situação e decidir quais das razões trigonométricas usar. (Veja figura 65.)

Figura 65 – Alunos fazendo interpretação geométrica

Fonte: Autor, 2013

O resultado encontrado pela equipe está ilustrado na figura 66.

Figura 66 – Resultado encontrado pela equipe EB5



Fonte: Autor, 2013

3.3.2 A atividade desenvolvida pela equipe EA6

Procedendo do mesmo modo descrito na seção anterior, apenas deslocando a mesa com o teodolito para mais distante da pilastra a equipe EA6 encontrou o resultado ilustrado na figura 67.

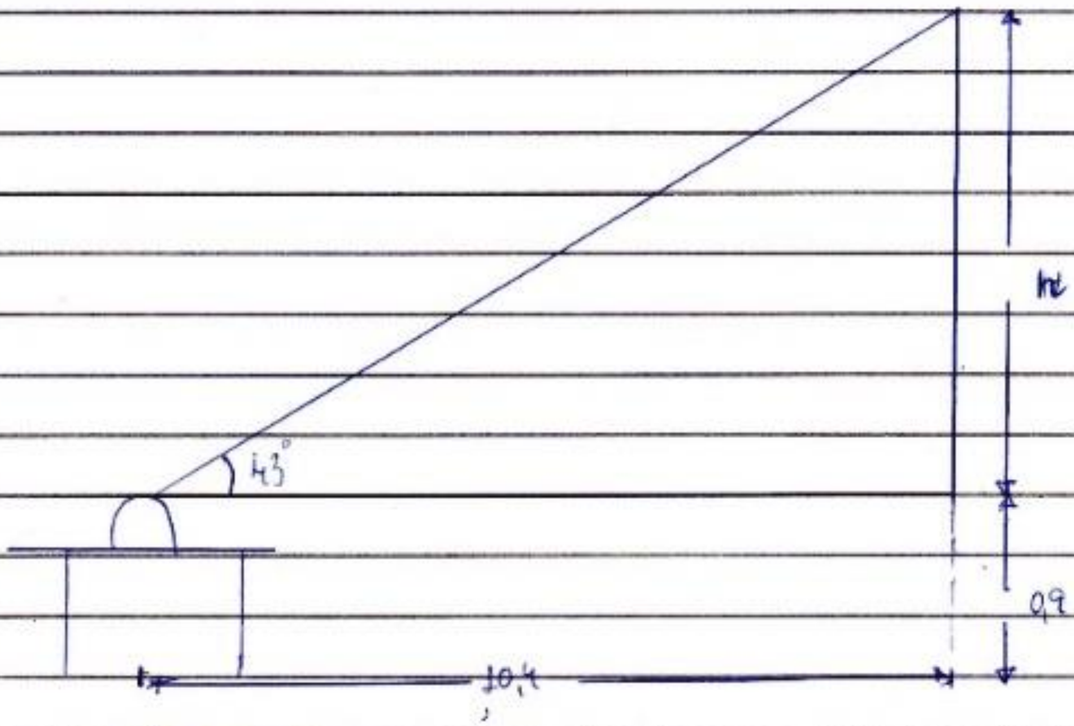
Figura 67 – Resultado obtido pela equipe EA6

Altura da mesa: 0,9 m.

Distância entre a mesma e a pilastra: 10,4 m

Medida do ângulo: 43°

Altura da fachada: H = h + 0,9.



$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = tg$$

$$tg\ 43^\circ = \frac{h}{10,4} \Rightarrow 0,933 = \frac{h}{10,4}$$

$$h = 9,7$$

A altura será

$$H = 9,7 + 0,9 \Rightarrow H = 10,6\ m.$$

Fonte: Autor, 2013

3.3.3 Atividade desenvolvida pela equipe EA2

Determinar a altura de uma torre de transmissão de TV situada ao lado da escola. Veja figura 68 abaixo.

Figura 68 – Torre de transmissão de TV

Fonte: Autor, 2013

Inicialmente, um dos alunos posicionou-se a certa distância da torre e mediu o ângulo sob o qual ele via o topo da mesma, e outro aluno anotou a medida do ângulo. Em seguida, ele andou 7,5 metros em direção à torre e novamente mediu o ângulo sob o qual a via, conforme as figuras 69, 70 e 71.Logo após, anotaram o resultado obtido.

Figura 69 – Medição do primeiro ângulo

Fonte: Autor, 2013

Figura 70 – Deslocamento de 7,5 metros em direção à torre

Fonte: Autor, 2013

Figura 71 – Medição do segundo ângulo

Fonte: Autor, 2013

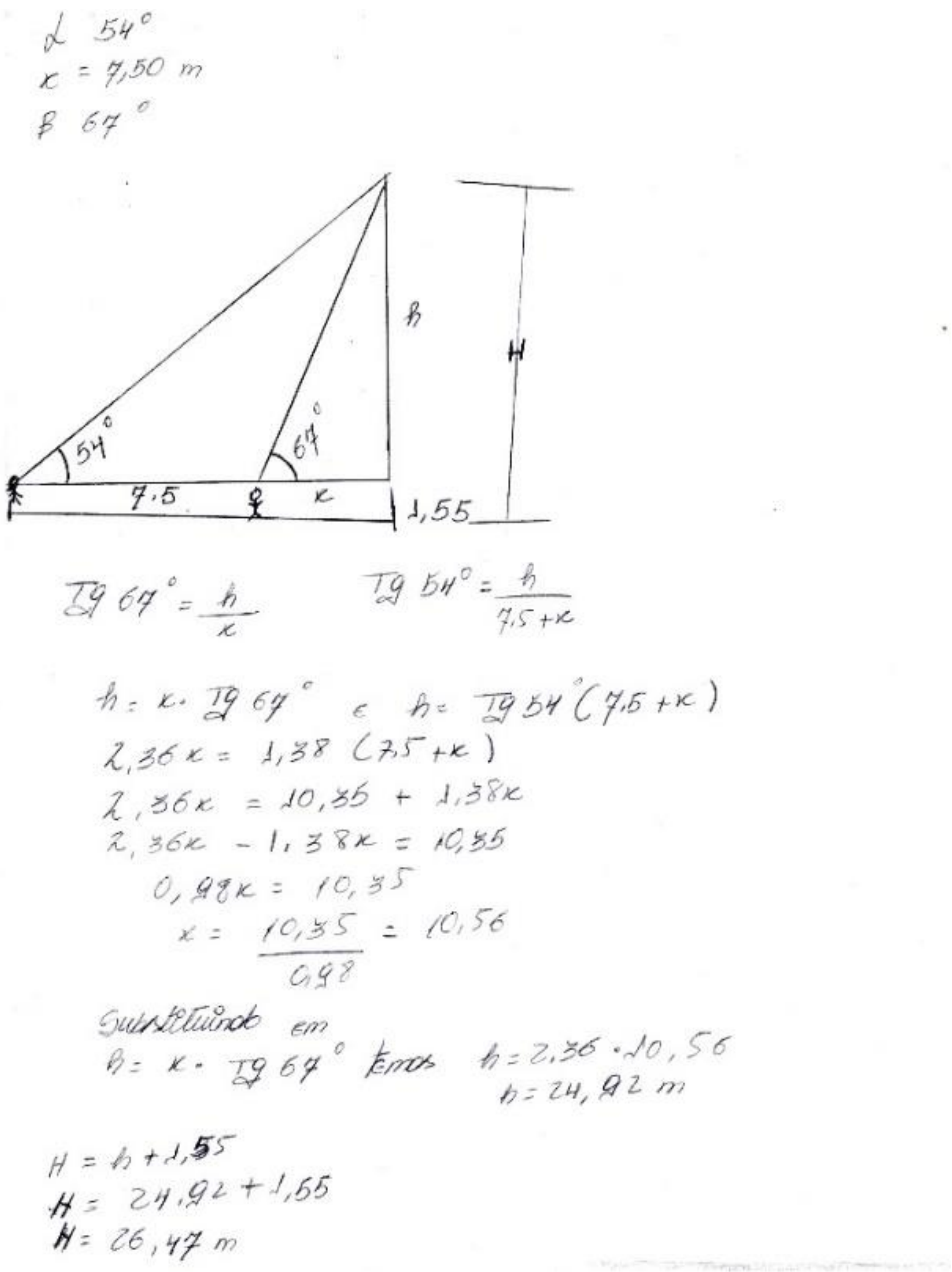
Tendo em mão as informações necessárias, os alunos reuniram-se fizeram a representação geométrica da situação e calcularam a altura da torre, fazendo uso das razões trigonométricas. (Veja figura 72.)

Figura 72 – Equipe resolvendo o problema

Fonte: Autor, 2013

O resultado obtido é mostrado na figura 73.

Figura 73 – Resultado obtido pela equipe EA2



Fonte: Autor, 2013

Ao fim das atividades, foi solicitado que relatassem oralmente ou por escrito o que acharam da aula ou de algo que os tivessem chamado atenção. Seguem alguns dos comentários e relatos escritos.

3.3.4 Comentários e relatos a respeito da atividade 3

Aluno A_{18}:
"Foi massa a aula de hoje todo mundo querendo medir, calcular e comparar o resultado pra ver quem acertou."

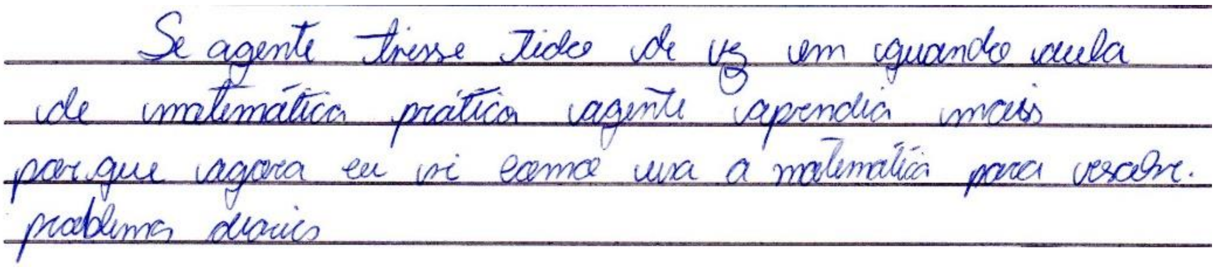
Aluno B_{09}:
"Bem melhor do que resolver os problemas do livro porque aqui a gente tá no meio do problema."

Aluno B_{02}:
"Gostei mais achei um pouco difícil, eu fico pensando como aqueles matemáticos de antigamente pensaram nessas coisas."

Aluno A_{21}:
"Foi muito interessante antes eu nem sabia pra que servia estudar ângulo agora eu sei."

Aluno B_{35}:
"Se agente (*sic*) tivesse tido de vez em quando aula de matemática prática agente aprendia mais porque agora eu vi como usa a matemática para resolver problemas diários." (Ver figura 74.)

Figura 74 – Relato do aluno B_{35}

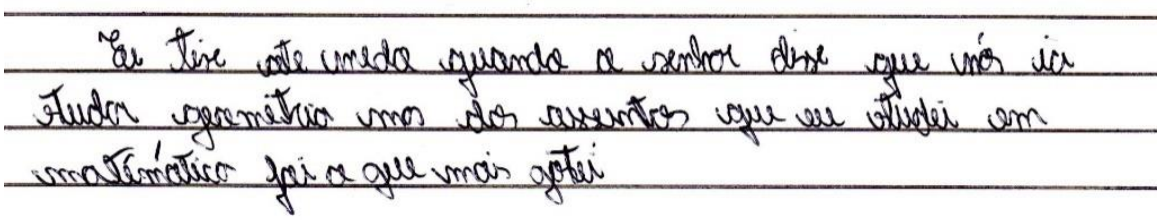

Se agente tivesse tido de vez em quando aula
de matemática prática agente aprendia mais
porque agora eu vi como usa a matemática para resolver.
problemas diarios

Fonte: Autor, 2013

Aluno A_{40}:

"Eu tive ate (*sic)* medo quando o senhor disse que nós ia estudar geometria mas dos assuntos que eu estudei em matemática foi o que eu mais gostei." Ver figura 75 a seguir.

Figura 75 – Relato do aluno A_{40}


Eu tive ate medo quando o senhor disse que nós ia
Estudar geometria mas dos assuntos que eu estudei em
matématica foi o que mais gostei

Fonte: Autor, 2013

Nesses relatos, percebe-se a empolgação dos alunos diante dos problemas e comparação feita em relação aos abordados no livro didático que acabam desmotivando o aluno porque, para ele não faz nenhum sentido, diferente de quando ele é desafiado a resolver o problema na prática. Nota-se também, o medo de que alguns alunos têm ao estudar geometria, mas, quando são envolvidos com o problema prático, o que era medo, torna-se gosto pela matéria.

Em nossas atividades, foram registrados relatos e imagens dos alunos. Como a faixa etária dos mesmos está em torno dos 15 anos, para a utilização desses registros, foi pedida autorização aos pais ou responsáveis destes, por meio do Termo de Consentimento Livre e Esclarecimento que se encontra anexo no final do trabalho. A análise das atividades e dos relatos feitos pelos alunos foi realizada durante a aplicação dos mesmos.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nos livros didáticos de Ensino Fundamental, a trigonometria é usualmente abordada a partir de breves contextualizações. A nosso ver, esse modo de abordagem não permite ao aluno estabelecer uma relação precisa entre os conceitos matemáticos e as situações por ele vivenciadas, resultando numa significativa distância entre teoria e prática. Além disso, como frisamos na introdução, os estudantes apresentam em sala de aula constantemente grande interesse em saber a importância do saber matemático para as suas vidas e a sua aplicabilidade.

A história da trigonometria como um recurso didático constitui-se − pela maneira como está proposta neste trabalho – numa metodologia alternativa no que diz respeito à exposição presente nos livros didáticos de Ensino Fundamental. A sequência didática aqui apresentada utiliza a história da trigonometria como um recurso didático que se revelou efetivo, neste trabalho didático, para minimizar tal distância. Além disso, é sabido que alguns conteúdos são apresentados ao aluno sem que se façam algumas abordagens históricas às quais, por sua vez, são indispensáveis ao avanço do discente no que se trata da aquisição de conhecimento de um ponto de vista crítico.

Com a motivação de propiciar um processo de ensino-aprendizagem da trigonometria, percebemos, no início do nosso trabalho, que seria necessário apresentar um levantamento do desenvolvimento histórico da trigonometria. Partindo desse raciocínio, no capítulo 1, intitulado "Contando um pouco da história da trigonometria", apresentamos o fundo histórico de alguns fatos matemáticos que marcaram época, e que proporcionaram alicerces importantes para o desenvolvimento da trigonometria. E ainda apresentamos alguns matemáticos influentes que prestaram imensa contribuição para a humanidade, mais precisamente no campo da Filosofia e da Matemática. Esperamos, assim, estar oferecendo informações relevantes para os professores e estudantes que pretendem abordar a trigonometria de um ponto de vista histórico.

Além disso, o levantamento histórico do desenvolvimento da trigonometria mostrou que nem sempre a bibliografia apresenta um ponto de vista matemático consistente e claro. Diante dessa constatação, resolvemos apresentar no capítulo 2 uma fundamentação matemática da Trigonometria. Desse modo, presumimos estar oferecendo aos professores e aos estudantes elementos para uma melhor compreensão dos aspectos matemáticos envolvidos no ensino e na aprendizagem da trigonometria. Nessa abordagem, foram expostos teoremas, definições, propriedade e demonstrações que servem de ferramentas fundamentais no processo ensino-aprendizagem da Trigonometria.

Por último, no capitulo 3 foi apresentada a aplicação das atividades práticas, onde os discentes apresentaram um seminário sobre a história da trigonometria. Em seguida, eles utilizaram métodos análogos àqueles dos matemáticos pioneiros para calcular distâncias.

Nesta dissertação, no tocante às definições e demonstrações, não foram utilizados recursos matemáticos mais sofisticados, em virtude do fato de que a finalidade desta foi alcançar os alunos do Ensino Fundamental. A sequência didática foi elaborada, tendo como referência a experiência do professor em sala de aula e nos conhecimentos prévios dos discentes.

Vale ressaltar ainda, o fato de que toda a metodologia de utilização da sequência didática adotada poderá ser utilizada em outras séries. Contudo, algumas demonstrações e aplicações precisam ser adaptadas ao nível dos alunos.

Por fim, espera-se que os dois maiores resultados obtidos por essa composição escrita sejam: (1) promover um caminho pelo qual o aluno venha a ser bem sucedido no processo ensino-aprendizagem no que diz respeito à Trigonometria; (2) despertar no professor o cuidado de relacionar teoria e prática, utilizando a História como recurso.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**/ AaboeAsger; tradução de João Bosco Pitombeira. – Rio de Janeiro: SBM, 2013.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 3ª. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

EVES, Howard. **Introdução da História da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

Explorando o ensino da Matemática: atividades: volume 2/ seleção e organização Ana Catarina P. Hellmeister... [et al.]; organização geral Suely Druck. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da matemática**, 9º ano/ José Ruy, Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. – Ed. Renovada. – São Paulo: FTD, 2009. – (Coleção a conquista da matemática).

GUELLI, Oscar. **Contando a História da Matemática**: volume 6 dando corda na trigonometria. São Paulo. Ed. Ática, 1993.

História da Astronomia [Aistarco de Samos]. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=WJBpCex4cLw>. Acesso em 28 nov. 2013.

IEZZI, G; HAZZAN, S; **Fundamentos de Matemática Elementar**, 2ª ed. São Paulo: Atual, 1977.

NOBRE, S. **Elementos historiográficos da matemática presentes em enciclopédias universais**. 2001. Dissertação (Livre Docente em Geociências)- Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

NOGUEIRA, Salvador. **Astronomia**: ensino fundamental e médio/ Salvador Nogueira, João Batista Garcia Canalle. Brasília: MEC, SEB; MCT; AEB, 2009. 232 p.:il. – (Coleção Explorando o ensino; v. 11).

O legado de Pitágoras. Disponível em: <http://tvescola.mec.gov.br/tve/search?searchField=o+legado+de+pitagoras&clearBreadCrumb=true>. Acesso em 13 de nov. 2013.

REVISTA CÁLCULO, edição 39, ano 4, abril, 2014, ISSN: 2179-1384. Ministério da Educação - FNDE. PNBE, periódicos, 2014.

RPM, REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, nº 01, 1982, ISSN: 0102-4981, SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo.

RPM, REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, nº 54, 2º quadrimestre de 2004, ISSN: 0102-4981, SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo.

RPM, REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, nº 62, 1º quadrimestre de 2007, ISSN: 0102-4981, SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia, 2**: ensino médio/ Jackson Ribeiro. – São Paulo: Scipione, 2010.

ROQUE, Tatiana. **Tópicos de História da Matemática**/ Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira Carvalho. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ANEXOS

ANEXO - A

Construção do Teodolito.

Material utilizado:

1 transferidor de 360º

8 pregos de uns 2 cm

1 parafuso de uns 4 cm de rosca contínua

Um pedaço de cabo de vassoura de uns 10 cm

Uma tampa de garrafa pet

Um pedaço de uns 7 cm de arame 14

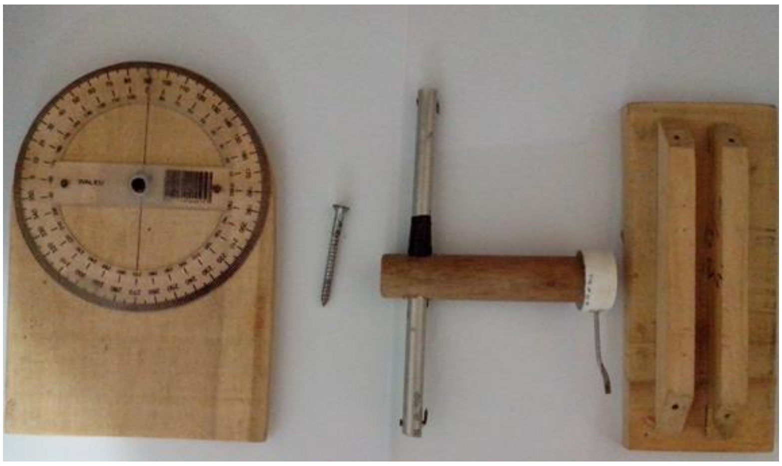
Uma tábua de pinho de 12 x 18 cm para fixar o transferidor

Uma tábua de pinho de 7 x 17 cm para fazer a base do teodolito

Um pedaço de uns 17 cm de elemento diretor de antena de TV.

Modo de fazer

Fixar o transferidor na tábua utilizando dois pregos, com uma furadeira faça um furo no centro, de modo que o parafuso de rosca contínua passe justinho. Ainda com a furadeira e com uma broca da espessura do elemento de antena, faça um furo na perpendicular do pedaço de cabo de vassoura e fixe o elemento, fixe a tampinha de garrafa pet no pedaço de cabo e faça um furo no centro para facilitar a entrada do parafuso de rosca contínua, na tampinha, e, paralelo ao elemento de antena, fixe o pedaço de arame que funcionará como um ponteiro para marcar o ângulo observado. No elemento de antena, fixe um prego na parte superior e outro na inferior passando pelo diâmetro, eles vão ser a mira. Faça uma base com a outra tábua.



Pronto, agora é só montar

ANEXO - B

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu, ____ pai (mãe) ou responsável legal do(a) estudante(a) ____, autorizo meu filho(a) a participar da pesquisa desenvolvida pelo Profº. Elinelson Gomes de Oliveira e orientado pelo Profº. Dr. Ediel Azevedo Guerra, do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Alagoas.

A pesquisa consistirá na realização de entrevistas, fotografias, intervenção pedagógica junto aos participantes do estudo e posterior análise dos dados.

A qualquer momento da realização desse estudo qualquer participante/pesquisado ou o estabelecimento envolvido poderá receber os esclarecimentos adicionais que julgar necessários. O sigilo das informações será preservado através de adequada codificação dos instrumentos de coleta de dados. Todos os registros efetuados no decorrer desta investigação serão usados para fins unicamente acadêmico-científicos e apresentados na forma de Dissertação, não sendo utilizados para qualquer fim comercial.

Em caso de concordância com as considerações expostas, solicitamos que assine este “Termo de Consentimento Livre e Esclarecido”. Desde já agradecemos sua colaboração e nos comprometemos com a disponibilização à instituição dos resultados obtidos nesta pesquisa, tornando-os acessíveis a todos os participantes.

_________________________________ _________________________________

Profº. Elinelson Gomes de Oliveira
Profº. Pesquisador
PROFMAT/UFAL

Profº. Dr. Ediel Azevedo Guerra
Orientador
PROFMAT/UFAL

Rio Largo, _____/______/2013.

ANEXO - C

Rio Largo

COLEGIO MUNICIPAL
JUDITH PAIVA
Rua Alberto Santos Dumont, S/N
Fone: 261-1364 - Rio Largo - AL.

PREFEITURA MUNICIPAL DE RIO LARGO – AL
SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO – SEMED
COLÉGIO MUNICIPAL JUDITH PAIVA
AV. ALBERTO SANTOS DUMONT, S/N – CENTRO – RIO LARGO –AL
CNPJ: 01.089891/0001-67, E-MAIL: CMJUDITHPAIVA@HOTMAIL.COM

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Eu, Maria Cristina Veríssimo Faustino, Diretora Geral do Colégio Municipal Judith Paiva, autorizo pelo presente termo, a utilização do nome desta unidade de ensino, pelo professor pesquisador **ELINELSON GOMES DE OLIVEIRA**, em sua Dissertação de Mestrado (PROFMAT/UFAL) orientado pelo professor Dr. Ediel Azevedo Guerra (PROFMAT/UFAL). Pois, tenho ciência de que todos os registros efetuados no decorrer de sua investigação serão usados para fins unicamente acadêmico-científicos não sendo utilizados para qualquer fim comercial.

Rio Largo – Al, 14 de julho de 2015.

Maria Cristina Verissimo Faustino

DIREÇÃO
Maria Cristina Verissimo Faustino
Diretora Geral
Portaria 038/2012